E. V. R o d i n a

ON A GEOMETRY OF FUNDAMENTAL AND STRUCTURAL
FORMS OF ALMOST CONTACT MANIFOLDS

An interconnection between properties of closure and coclosure of fundamental and structural forms of some types of almost contact manifolds on one hand and properties of linear extension of such manifolds on the other hand has been investigated.

УДК 514.7

ДОПОЛНЕНИЕ К ОДНОЙ РАБОТЕ Ж.-П. БУРГИНЬОНА

С. Е. С т е п а н о в, В. В. Р о д и о н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Введение. В ставшей уже классической монографии [1] был опубликован доклад Ж.-П.Бургиньона, в котором, в частности, рассматривались фундаментальные дифференциальные операторы на пространстве сечений $C^\infty\Lambda^k M$ и $C^\infty S^2_0 M$ расслоений внешних дифференциальных k-форм $\Lambda^k M$ и симметрических бесследовых 2-форм $S^2_0 M$ над римановым многообразием M. В первом случае были найдены два фундаментальных оператора и указано на существование третьего. Далее Ж.-П.Бургиньон писал: “Помимо случая k=1, он не имеет простой геометрической интерпретации”. В статье [2] одного из авторов было доказано, что ядро третьего фундаментального оператора составляют открытые и изученные еще до упомянутого доклада конформно-киллинговые k-формы [3], [4]. Во втором случае Ж.-П.Бургиньон выписал все три оператора и охарактеризовал первый, но при этом заметил следующее: “Ядра двух других фундаментальных операторов не имеют простой геометрической интерпретации”. В настоящей заметке мы перенесли рассуждения на псевдориманово многообразие M. Нашли заново три фундаментальных дифференциальных оператора на $C^\infty S^2_0 M$ и дали геометрическую интерпретацию ядру каждого из них.

2.Фундаментальные операторы на $C^\infty S^2_0 M$. Пусть M будет m-мерным псевдоримановым многообразием с метрикой g сигнатуры (s,r) и связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через $S^2_0 M$ расслоение симметрических бесследовых 2-форм. Пусть

$$D: C^\infty S^2_0 M \to C^\infty(T^*M \otimes S^2_0 M)$$

естественный римановый дифференциальный оператор первого порядка. Дифференциальный оператор D назовем *фундаментальным* [1,с.265], если его главный символ является проектором на неприводимые относительно действия группы O(s,r) компоненты разложения пространства $T^*M\otimes S^2_0M$. Нетрудно проверить, что справедливо следующее ортогональное разложение:

$$T^*M\otimes S^2_0M = S^3_0M \oplus (\mathrm{Ker\,Sim} \cap \mathrm{Ker\,Tr}) \oplus \mathbf{R}(\mathrm{Im\,Tr}) \square g, \qquad (2.1)$$

где ортогональные проекции на компоненты разложения определяются формулами:

$$[\mathrm{Pr}_{S^3_0M} K](X,Y,Z) = \frac{1}{3}\{K(X,Y,Z) + K(Y,Z,X) + K(Z,X,Y) -$$

$$-\frac{2}{m+2}\sum_{i=1}^{m} [K(e_i,e_i,X)g(Y,Z)+K(e_i,e_i,Y)g(Z,X) +K(e_i,e_i,Z)g(X,Y)]\};$$

$$[\mathrm{Pr}_{\mathbf{R}(\mathrm{ImTr})\square g} K](X,Y,Z) = \frac{m}{m^2+m-2}\{\sum_{i=1}^{m} [K(e_i,e_i,Y)g(X,Z) +$$

$$+ K(e_i,e_i,Z)g(X,Y) - \frac{2}{m} K(e_i,e_i,X)g(Y,Z)]\},$$

$$(\mathrm{Pr}_{\mathrm{Ker\,Tr}\cap\mathrm{Ker\,Sim}} K)(X,Y,Z) = K(X,Y,Z) + \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} K(e_i,e_i,X)g(Y,Z) - -\frac{1}{3(m-1)}\sum_{i=1}^{m} [$$

$$K(e_i,e_i,X)g(Y,Z)+ K(e_i,e_i,Y)g(Z,X)+ K(e_i,e_i,Z)g(X,Y)] - -\frac{1}{3}[K(X,Y,Z) + K(Y,Z,X) + K(Z,X,Y)],$$

где $\{e_1,...,e_m\}$ - локальный ортонормированный базис векторных полей на псевдоримановом многообразии M.

Поточечная неприводимость относительно действия группы O(s,r) разложения (2.1) пространства $T^*M\otimes S^2_0M$ следует из теорем Г.Вейля о квадратичных O(s,r) - инвариантных формах [1,с.156]. Здесь мы имеем только три такие независимые инвариантные квадратичные формы:

$$\psi_1(K)= \sum_{i,j,k=1}^{m} [K(e_i,e_j,e_k)]^2;\ \psi_2(K)= \sum_{i,j,k=1}^{m} K(e_i,e_j,e_k)]\ K(e_i,e_j,e_k);$$

$$\psi_3(K)= \sum_{i,j=1}^{m} [K(e_i,e_j,e_j)]^2,$$

что свидетельствует о неприводимости разложения.

Первым фундаментальным дифференциальным оператором первого порядка, чей символ будет проектором на компоненту $R(\mathrm{Im\,Tr})\square g$ разложения (2,1), является

$$[D_1(\varphi_{ij})]_k = \frac{m}{m^2+m-2}\,[\nabla^e\varphi_{ej}\, g_{ik} + \nabla^e\varphi_{ek}\, g_{ij} - \frac{2}{m}\nabla^e\varphi_{ei}\, g_{jk}], \qquad (2.2)$$

где символ ∇_i означает ковариантное дифференцирование в направлении векторного поля $\partial/\partial x^i$; $\varphi_{ij} = \varphi(\partial/\partial x^i,\partial/\partial x^j)$ и $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i,\partial/\partial x^j)$ относительно локальной системы координат $x^1,...,x^m$ на M.

Вторым фундаментальным дифференциальным оператором, чей символ будет проектором на компоненту S^3_0M разложения (2,1) является

$$[D_2(\varphi_{ij})]_k=\frac{1}{3}(\nabla_k\varphi_{ij}+\nabla_i\varphi_{jk}+\nabla_j\varphi_{ki})-\frac{1}{3(m+2)}(\nabla^e\varphi_{ei}g_{jk}+\nabla^e\varphi_{ej}g_{ik}+\nabla^e\varphi_{ek}g_{ij}) \qquad (2.3)$$

И, наконец, третьим фундаментальным дифференциальным оператором первого порядка, чей символ будет проектором на неприводимую компоненту Ker Sim $\cap$ Ker Tr разложения (2,1) является

$$[D_3(\varphi_{ij})]_k = 2\,[\nabla_i\varphi_{jk} + \frac{1}{m-1}(\nabla^e\varphi_{ei}\,g_{jk})] - [\nabla_j\varphi_{ik} + \frac{1}{m-1}(\nabla^e\varphi_{ej}\,g_{ik})] -$$

$$- [\nabla_k\varphi_{ij}+\frac{1}{m-1}(\nabla^e\varphi_{ek}g_{ij})] \quad (2.4)$$

Теорема 1. На пространстве сечений $C^\infty S^2_0 M$ расслоения $S^2_0 M$ симметрических бесследовых 2-форм над псевдоримановым многообразием M существует три дифференциальных оператора D_1,D_2 и D_3 определяемых равенствами (2.2) - (2.4).

3. Ядра фундаментальных операторов. Не составит труда проверить, что ядро первого фундаментального дифференциального оператора (2.5) составят симметрические бесследовые замкнутые 2-формы, которые образуют подмодуль **R**-модуля симметрических 2-форм на M.

Ядро второго фундаментального дифференциального оператора (2.6) составят симметрические бесследовые 2-формы, подчиняющиеся следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_i\varphi_{jk}+\nabla_j\varphi_{ki}+\nabla_k\varphi_{ij}=\theta_i g_{jk}+\theta_j g_{ki}+\theta_k g_{ij}, \qquad (3.1)$$

где $\theta_i = \frac{1}{m+2}\nabla^e\varphi_{ei}$. Дифференциальные симметрические бесследовые 2-формы φ удовлетворяющие уравнениям вида(3.1) называются [1,c.339-340] конформно-киллинговыми. Если γ: $t\in J \to \gamma(t) \subset M$ является изотропной геодезической, отнесенной к аффинному параметру t, то для $X\in d\gamma/dt$, будем иметь

$$(\nabla_x\varphi)(X,X)=g(X,X)\theta(x)\equiv 0.$$

Следовательно, симметрическая конформно-киллинговая 2-форма φ на псевдоримановом многообразии задает квадратичный первый интеграл движения уравнений изотропных геодезических.

Ядро третьего фундаментального дифференциального оператора (2.4) составят симметрические бесследовые 2-формы φ, подчиняющиеся следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_i\,\varphi_{jk} - \nabla_j\,\varphi_{ik} = \theta_i\,g_{jk} - \theta_j\,g_{ik} \qquad (3.2)$$

для $\theta_i = \frac{1}{m-1}\nabla^e\varphi_{ei}$. Такую 2-форму φ назовем конформно-кодаццевой,

поскольку непосредственно проверяется, что компонента $\varphi = \psi - \frac{1}{m}(\mathrm{Tr}\ \psi)g$ кодаццевой 2-формы ψ [6,c.589] удовлетворяет уравнению (3.2). На псевдоримановом многообразии M постоянной секционной кривизны C каждая кодаццевая 2-

форма ψ имеет вид [7, с.169] $\psi = \nabla^2 f + C\ f\ g$ для произвольной $f \in C^\infty M$. Тогда конформно-кодаццевая 2-форма φ на M будет иметь вид: $\varphi = \nabla^2 f - \frac{1}{m}(\Delta f)\, g$.

Непосредственно проверяется, что множества конформно-кодаццевых и конформно-киппинговых 2-форм образуют два подмодуля **R**-модуля симметрических бесследовых 2-форм на M. Доказана

Теорема 2. Ядрами трех фундаментальных дифференциальных операторов (2.2) - (2.4), определенных на пространстве сечений $C\infty S^2_0 M$ расслоения $S^2_0 M$ над псевдоримановым многообразием M служат, соответственно, козамкнутые, конформно-киллинговые и конформно-кодаццевые 2-формы, образующие подмодули **R**-модуля симметрических бесследовых 2-форм на M.

4.Теоремы Бохперовского типа. Рассмотрим компактное (без границы) ориентированное риманово многообразие M.Справедлива следующая интегральная формула [8]:

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{m} R(e_i,e_j,e_i,e_j)(\lambda_i-\lambda_j)^2 + 2\,\left|Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi\right|^2 - \left|Pr_{Ker\,Tr \cap Ker\,Sim}\nabla\varphi\right|^2 - m\left|Pr_{\mathbf{R}(ImTr)\square g}\nabla\varphi\right|^2 \Big\}\,dv = 0, \quad (4.1)$$

где R-тензор римановой кривизны M и $\varphi(e_i,e_j)=\lambda_i\,\delta_{ij}$ для локального ортонормированного базиса $\{e_1,...,e_m\}$ векторных полей на M.

Пусть $\varphi \in Ker\ D_2$, тогда интегральная формула (4.1) принимает следующий вид:

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{m} R(e_i,e_j,e_i,e_j)(\lambda_i-\lambda_j)^2 - \left|Pr_{KerTr \cap KerSim}\nabla\varphi\right| 2 - m\left|Pr_{R(ImTr)\square g}\nabla\varphi\right|^2 \Big\}\,dv = 0$$

Если предположить, что секционная кривизна многообразия M всюду неположительная, тогда $\sum_{i,j=1}^{m} R(e_i,e_j,e_i,e_j)(\lambda_i-\lambda_j)^2 \le 0$ и из (4.1) последует, в частности, что $\nabla\varphi=0$. Если же предположить, что секционная кривизна многообразия M в некоторой точке отрицательная во всех 2-направлениях, то $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_m=0$ и, следовательно $\varphi=0$. Доказана

Теорема3. Любая симметрическая конформно-киллинговая 2-форма φ на компактном ориентированном римановом многообразии неположительной секционной кривизны K параллельна. Если при этом в некоторой точке отрицательная во всех 2-направлениях $K<0$, то $\varphi=0$ и, следовательно, $KerD_2=\varnothing$.

Аналогичный результат не получается для конформно-кодаццевой 2-формы φ. Необходимо потребовать дополнительно, чтобы $\varphi \in KerD_3 \cap KerD_1$.
В этом случае на основании теоремы кодаццевых тензорах [1, с.591] можем сформулировать

Следствие: Любая бездивергентная симметрическая конформно-кодаццевая 2-форма φ на компактном римановом многообразии неотрицательной секционной кривизны K параллельна. Если при этом в некоторой точке $K>0$, то $\varphi=0$ и, следовательно, $KerD_3 \cap KerD_1=\varnothing$.

Библиографический список

1. Четырехмерная риманова геометрия. М.:Мир, 1985. 334с.
2. *Stepanov S.E.* The seven classes of almost symplectic structures // Webs & Quasigrups. Tver, 1992. c.93-96.
3. *Tachibana S.* On conformal Killing tensor in a Riemannian space // Tohoku Math.Joun. 1969. Vol.21. c.56-64.
4. *Kashiwada T.* On conformal killing tensor // Natural Science Report Ochanomizu University. 1968. Vol.19. №2. c.67-74.
5. *Крамер Д. и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна: М.: Энергоиздат, 1982. 416с.
6. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2 т. М.:Мир, 1990. 703с.
7. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432с.
8. *Степанов С.Е.* Симметрические 2-тензоры с постоянным следом // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1992. Вып. 23. с.94-96.

S. E. S t e p a n o v, V. V. R o d i o n o v

ADDITION TO ONE J.-P. BOURGIGNON′S WORK

Three fundamental differential operators on the space of sections $C^\infty S_0^2M$ of a S_0^2M fibering of symmetric Bessel′s forms are found and a geometric interpretation of each kernel is given in the article.

УДК 514.76

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГИПЕРПОЛОСНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский государственный пединститут)

Нормальные связности на нормализованных голономных подмногообразиях, погруженных в различные пространства, рассматривались в работах ряда геометров (см., например, обзор литературы в монографиях [6], [7]). Аналогичные исследования на неголономных подмногообразиях до настоящего времени не проводились. Предлагаемая работа, по-видимому, является первым шагом по исследованию этих вопросов на неголономных подмногообразиях; в ней рассматриваются двойственные центропроективные связности в нормальных расслоениях на гиперполосном распределении, погруженном в пространство проективной связности.