

А. П. Потанов, И. Б. Петров

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СОУДАРЕНИЯХ
МЕТОДОМ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (SPH)**

Рассмотрено моделирование высокоскоростных соударений различными вариантами метода сглаженных частиц при решении задач механики твердого деформируемого тела. Получены численные результаты решения задачи о распаде произвольного разрыва и проведен сравнительный анализ результатов.

Concerned issues are related to the modeling of high speed impact with different variants of the smoothed particle hydrodynamics method and applying this method to the solution of problems of mechanics of the deformed solid body. Results of solution of the problem of disintegration of discontinuity were obtained and comparative analysis was performed.

Ключевые слова: метод сглаженных частиц, упругопластическая модель, распад разрыва, трехмерный алгоритм.

Keywords: SPH, elastic-plastic, discontinuity, 3D algorithm.

Введение

Современные проблемы безопасности жилищных и промышленных построек требуют решения трехмерных задач механики твердого деформируемого тела со сложной геометрией. Решения часто имеют области больших деформаций и разрушений, сопровождающихся разлетом вещества. Численное решение таких задач сеточными методами сопряжено с большими трудностями, например построением трехмерной сетки и необходимостью ее периодической перестройки. Альтернативным вариантом решения этих задач является метод сглаженных частиц (Smooth Particle Hydrodynamics – SPH) [1; 2]. К плюсам этого метода стоит отнести простоту реализации трехмерного варианта и возможность моделировать разлет вещества без применения специальных техник. Важным моментом моделирования является изучение волновой картины происходящих процессов. С целью изучения свойств решений нами будет рассмотрено решение задачи о распаде разрыва.

Метод сглаженных частиц (SPH)

Основная суть метода заключается в приближении формулы $a(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x')\delta(x' - x)dx'$ цепочкой преобразований. Вначале заменяем обобщенную функцию $\delta(x)$ аналитической $\omega(x' - x, h)$ – ядром сглаживания, h – радиус сглаживания. В итоге $\bar{a}(x) = \int_{\mathbb{R}} a(x')\omega(x' - x, h)dx'$.

Ядро $\omega(x' - x, h)$ должно удовлетворять условиям $\int_{\mathbb{R}} \omega(x, h)dx = 1$ и $\omega(x, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \delta(x)$. В работах Моногана доказано, что при соблюдении

этих условий аппроксимация обеспечивает порядок $O(h^2)$. В расчетах используется удовлетворяющая им функция вида $\omega(x, h) = e^{-(x/h)^2}$.

Следующее преобразование состоит в замене интегрирования суммированием по частицам-соседям:

$$\bar{a}(x) = \sum_i \frac{m_i a_i}{\rho_i} \omega(x_i - x, h).$$

Использование такой аппроксимации существенно упрощает вычисление градиента полевой функции $\frac{\partial a(x)}{\partial x_\alpha}$, так как достаточно аналитически продифференцировать ядро сглаживания, что даст

$$\frac{\partial \bar{a}(x)}{\partial x_\alpha} = \sum_i \frac{m_i a_i}{\rho_i} \frac{\partial \omega(x_i - x, h)}{\partial x_\alpha}.$$

Численные аппроксимации уравнений механики деформируемого тела, построенные с помощью SPH, имеют порядок точности $O(h^2)$ и выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= -\sum_k m_k (u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}, \quad \frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}, \\ \frac{de_i}{dt} &= \sum_k m_k (u_i^\alpha - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}, \quad \frac{dS_i^{\alpha\beta}}{dt} = 2\mu \left(\varepsilon_i^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta^{\alpha\beta} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \right) + S_i^{\alpha\gamma} R_i^{\beta\gamma} + S_i^{\gamma\beta} R_i^{\alpha\gamma}, \\ \varepsilon_i^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right], \quad R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_k^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_k^\beta - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right], \end{aligned}$$

однако решения, найденные таким методом, обладают сильной немонотонностью, что мешает использовать метод при решении задач с интенсивными взаимодействиями.

Искусственная вязкость

Для борьбы с нефизичными осцилляциями Моноган [1] предложил использовать искусственную вязкость. Численный эксперимент показал, что применение такой же формы вязкости в задачах механики деформируемого твердого тела дает удовлетворительные результаты.

При использовании искусственной вязкости в члены вида $\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2}$ добавляется $\frac{a \xi_{ik} \bar{c}_{ik} + b \xi_{ik}^2}{\bar{\rho}_{ik}}$, где $\xi_{ik} = -\frac{(u_i^\alpha - u_k^\alpha)(x_i^\alpha - x_k^\alpha)h}{(x_i^\alpha - x_k^\alpha)^2 + 0,01h^2}$; \bar{c}_{ik} — средняя скорость звука; $\bar{\rho}_{ik}$ — средняя плотность; a и b — коэффициенты искусственной вязкости.

Метод с искусственной вязкостью имеет порядок точности $O(h^2)$, и обладает приемлемой немонотонностью, что позволяет его использовать при решении практических задач.

Приведем результаты решения задачи распада разрыва. На графиках видны осцилляции, которые с течением времени затухают — $\sigma_{zz}(z)$ и $u^z(z)$ (рис. 1, 2).

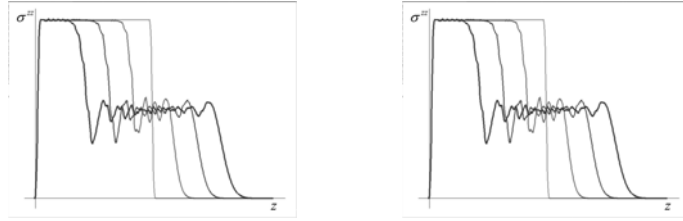


Рис. 1. Распад разрыва по напряжению (искусственная вязкость)

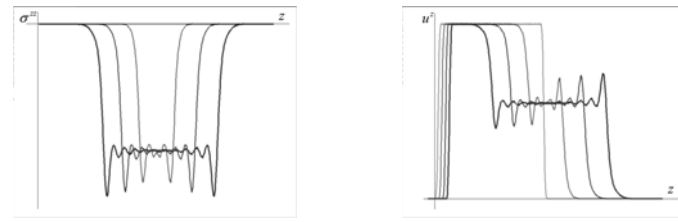


Рис. 2. Распад разрыва по скорости (искусственная вязкость)

Монотонная схема

В работе [3] предложен подход, использующий приближенное аналитическое решение задачи Римана. Идея заключается в замене всех $a_i + a_j$ и $a_i - a_j$ на $2a_{ij}^*$ и $2(a_{ij}^* - a_j)$ соответственно. Тут a_i , a_j — значения полевой функции в i -й и j -й частицах, а a_{ij}^* — соответствующее решение задачи о распаде разрыва. В результате полученных изменений аппроксимации наши уравнения станут следующими:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -2 \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha}, \quad \frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta},$$

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_k m_k (u_{ik}^{\alpha*} - u_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_{ik}^{\alpha\beta*}}{\rho_i \rho_k} \right) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta}, \quad \varepsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_{ik}^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} + (u_{ik}^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right],$$

$$R_i^{\alpha\beta} = \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(u_{ik}^{\alpha*} - u_i^\alpha) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\beta} - (u_{ik}^{\beta*} - u_i^\beta) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_i^\alpha} \right].$$

Использование приближенного аналитического решения Римана позволило создать монотонный алгоритм. Однако видно, что этот метод размывает фронт ударной волны, что характерно для подобных методов. Ниже приведены графики поведения решения задачи о распаде (рис. 3, 4).

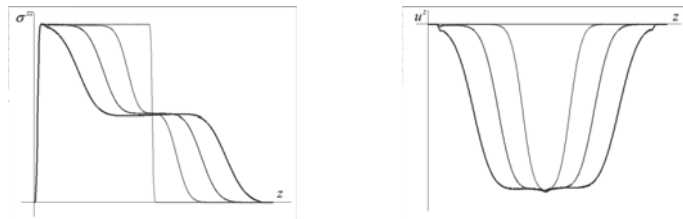


Рис. 3. Распад разрыва по напряжению (монотонная схема)

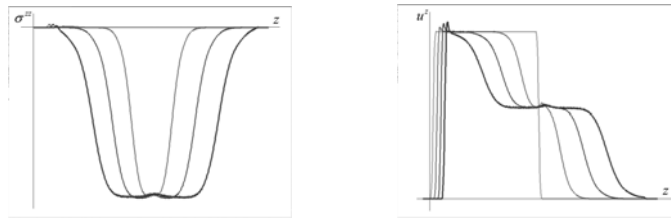


Рис. 4. Распад разрыва по скорости (монотонная схема)

Гибридизированная схема

С целью сочетания высокого (второго) порядка точности и монотонности было предложено сделать гибридную схему. Показаны результаты вычислений с помощью линейной комбинации оригинального и монотонного методов с коэффициентом гибридности 0,5. Как видно из сравнительного графика решения задачи о распаде разрыва по напряжению (рис. 5), гибридная схема практически монотонна, в отличие от схемы с искусственной вязкостью, и размывает разрывы меньше, чем схема, использующая инварианты Римана.

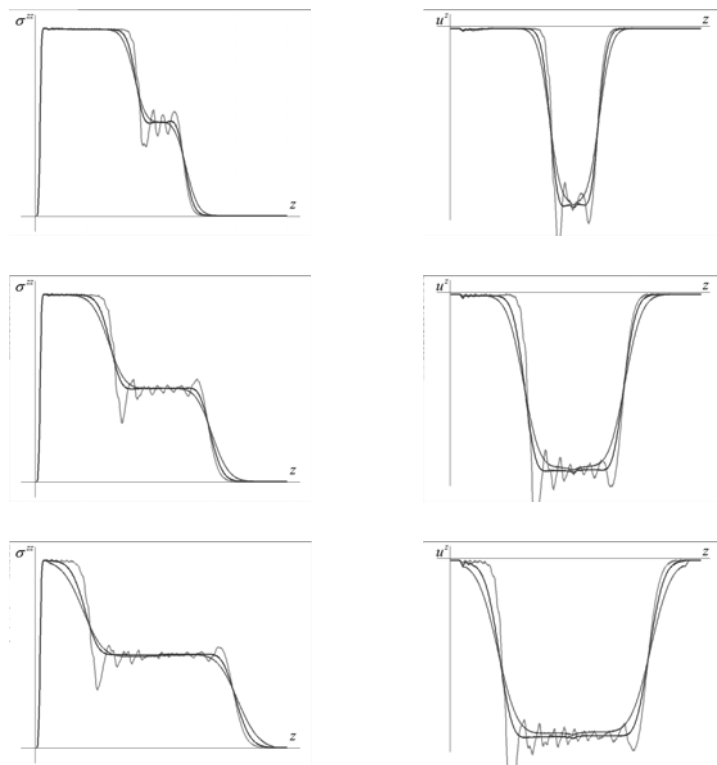


Рис. 5. Распад разрыва по напряжению (сравнительный график)

Гибридная схема

Следующим улучшением алгоритма является использование коэффициента гибридности, который зависит от решения.

Для определения разрывов в решении используется аналог отношения второй и первой производных решения по координате:

$$\beta \sim \frac{a''}{a'} \sim \frac{(a_{i+1} - a_i) - (a_i - a_{i-1}))}{(a_{i+1} - a_i) + (a_i - a_{i-1}))}.$$

Однако в нашем случае мы не можем пронумеровать частицы вдоль координатной оси. И для определения порядка мы будем использовать само значение координаты

$$\beta = \frac{\sum (a^* - a_i)(x^* - x_i) / |x^* - x_i|}{\sum (a^* - a_i)}.$$

Здесь a^* , x^* — значение параметра и местоположение данной частицы, а суммирование ведется по всем ее соседям. Подставив в качестве a все компоненты скорости и напряжения и просуммировав $u^z z$, получим коэффициент, хорошо показывающий разрывы в решении.

Далее приведены сравнительные результаты решения задачи о распаде разрыва по напряжению с помощью гибридизированной и гибридной схем.

Из сравнительных графиков (рис. 6) видно, что гибридная схема меньше размывает разрывы.

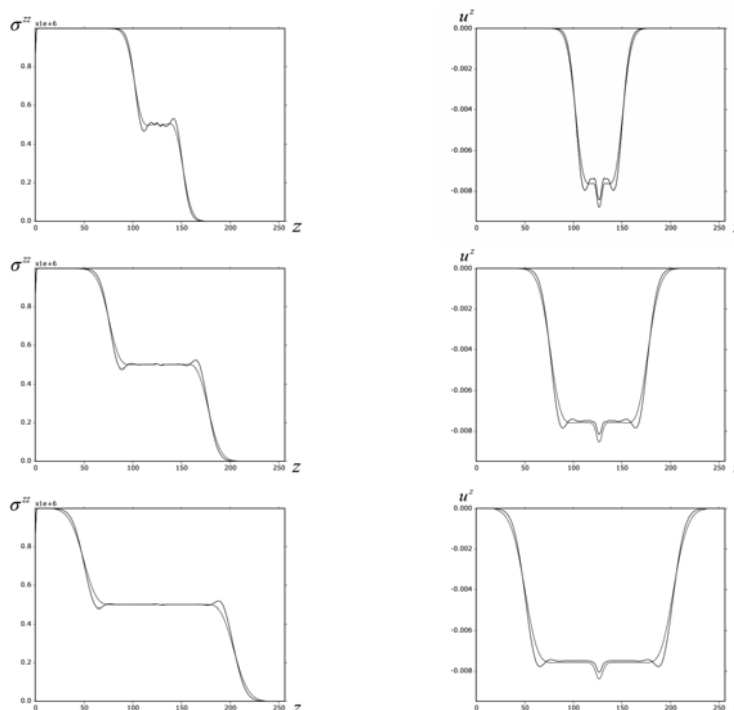


Рис. 6. Распад разрыва по напряжению (сравнительный график)

Рассмотрим результаты расчетов для численного решения следующих задач.

1. *Столкновение самолета со строительным сооружением.* Данная модель представляет практический интерес с точки зрения террористической безопасности. При расчетах параметры ударника подбирались таким образом, чтобы наиболее реалистично имитировать падение легкого одномоторного самолета.

2. *Падение деформируемого тела на слой грунта с большой скоростью.* В данном случае речь идет о безопасности подземных сооружений, например хранилища ядерных отходов. В работе рассмотрены случаи соударения со скоростями меньшими и превышающими скорость звука в грунте и показаны качественные различия волновых процессов.

Соударение самолета со зданием

В этой задаче основной интерес представляют волновые процессы в стенах и перекрытиях здания, а также разрушения в зоне соударения. Представлены распределения модуля скорости и давления (рис. 7). На рисунках четко виден фронт возмущений, имеющий конусообразную форму, что характерно для решетчатых конструкций. Также в области удара четко видны разрушения и большие деформации как здания, так и самолета. Эти результаты свидетельствуют об адекватности качественных характеристик процесса соударения трехмерному моделированию на основе гибридного метода сглаженных частиц.

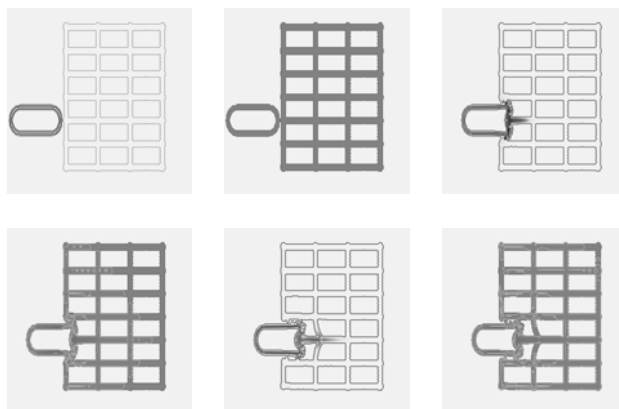


Рис. 7. Распределение давления (слева) и модуля скорости (справа)

Соударение с грунтом

В данной модели интерес представляют разлет грунта при ударе и волновая картина, возникающая при ударе. На рисунках изображены волновые процессы и процессы разрушения при сверхзвуковых скоростях соударения (рис. 8). Скорость падения превосходит скорость звука в грунте (2400 м/с), поэтому виден сверхзвуковой конус. Отображены

также волновые процессы и процессы разрушения для дозвуковых скоростей (рис. 9). В этом случае скорость меньше скорости звука, поэтому видна волна, обгоняющая ударник. Представленные результаты свидетельствуют о применимости гибридного метода сглаженных частиц для моделирования задач астероидной безопасности.

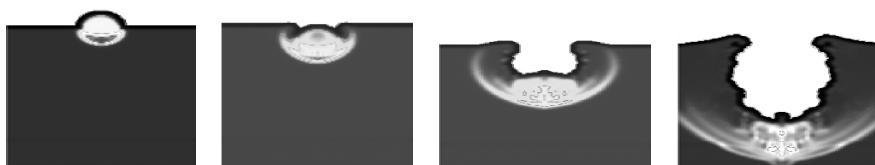


Рис. 8. Падение болида (10 000 кг, 10 000 м/с)
на грунт (10 м грунта, снизу 2 м бетона)

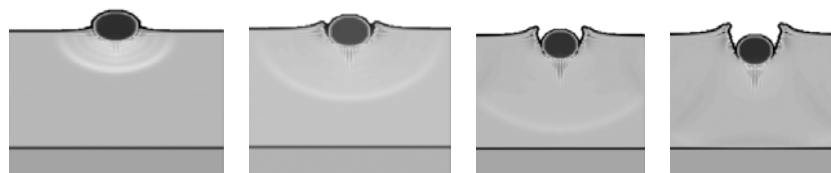


Рис. 9. Падение болида (10 000 кг, 1000 м/с)
на грунт (10 м грунта, снизу 2 м бетона)

Список литературы

1. Monagan J. J. An introduction to SPH // *Comput. Phys. Comm.* 1988. Vol. 48. P. 89–96.
2. Блажевич Ю. В., Петров И. Б., Сабельников А. Е. Моделирование динамических процессов разрушения пористых конструкций в проблеме безопасности жилищных сооружений // *Управление и обработка информации: модели процессов.* М., 2002. С. 72–78.
3. Parshikov A. N., Medin S. A., Loukashenko I. I. and so on. Improvements in SPH methods by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation tests at moderate projectile velocities // *International Journal of Impact Engineering.* 2000. Vol. 24. P. 779–796.

Об авторах

А. П. Потапов – асп., МФТИ, e-mail: potapov@7ka.mipt.ru.
И. Б. Петров – д-р физ.-мат. наук, проф., МФТИ.

Authors

A. P. Potapov – PhD student, MIPT, e-mail: potapov@7ka.mipt.ru.
Professor I. B. Petrov – MIPT.

