Список литературы

1. С к р ы д л о в а Е.В. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ в трехмерном проективном пространстве.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.5.Калининград,1974, с.141-158.

2. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3.Калининград,1973,с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

А.В.С т о л я р о в

УСЛОВИЕ КВАДРАТИЧНОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ

1. В последнее десятилетие по проективной теории регулярных гиперполос [1] в работах Ю.И.Попова (см.[5]-[8]), Василяна М.А. (см.[2],[3]) и ряда других геометров получены существенные результаты.

В одной из наших работ по этой теории, а именно в кратком сообщении [10], приведено (без доказательства) инвариантное аналитическое условие квадратичности регулярной m-мерной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное проективное пространство P_n ($2 \leq m < n-1$); настоящая статья содержит полное доказательство этого условия, причем все построения проведены в минимально канонизированном репере первого порядка.

2. Относительно репера первого порядка уравнение регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ имеет вид (см., например, [9],[11])

$$\omega_o^n = \omega_o^v = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_o^j, \qquad \omega_i^v = M_{ij}^v \omega_o^j, \quad \omega_v^i = N_{vj}^i \omega_o^j, \tag{1}$$

$$i,j,\kappa,\ell,s,t = 1,2,\ldots,m; \quad u,v,w = m+1,\ldots,n-1.$$

Отметим, что Λ_{ij}^n - симметрический невырожденный тензор первого порядка (оператор ∇_d действует по закону [II]):

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\,\omega^0_0 = \Lambda^n_{ijk}\,\omega^k_0, \qquad (2)$$

$\{M^v_{ij}, \Lambda^n_{ij}\}$ – геометрический объект первого порядка, N^i_{vj} – геометрический объект 2-го порядка гиперполосы H_m, причем компоненты геометрических объектов гиперполосы связаны соотношениями

$$M^v_{[ij]} = 0, \quad \Lambda^n_{j[i}N^j_{|v|k]} = 0; \qquad (3)$$

заметим, что величины Λ^n_{ijk} симметричны по любой паре нижних индексов.

Продолжая уравнения (2), имеем:

$$\nabla_d \Lambda^n_{ijk} + 2\Lambda^n_{ijk}\,\omega^0_0 + \Lambda^n_{(ij}\omega^0_{k)} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda^n_{k)s}\,\omega^s_n = \Lambda^n_{ijks}\,\omega^s_0, \qquad (4)$$

где по индексам в скобках проводится циклирование и

$$\Lambda^n_{ij[ks]} = \Lambda^n_{i\ell}M^v_{j[k}N^\ell_{|v|s]} + \Lambda^n_{\ell j}M^v_{i[k}N^\ell_{|v|s]}. \qquad (5)$$

Можно положить

$$\Lambda^n_{ijks} = \tilde{\Lambda}^n_{ijks} + \Lambda^n_{\ell(i}M^v_{jk)}N^\ell_{vs}, \qquad (6)$$

где величины $\tilde{\Lambda}^n_{ijks}$ симметричны по каждой паре нижних индексов; при этом равенства (5) в силу (3) не будут нарушены.

Если Λ^{ik}_n – тензор, взаимный тензору Λ^n_{ij}, то величины $\Lambda_k \overset{def}{=} \Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{ijk}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_d \Lambda_k + \Lambda_k\,\omega^0_0 + (m+2)(\omega^0_k - \Lambda^n_{kj}\,\omega^j_n) = \Lambda_{ik}\,\omega^k_0, \qquad (7)$$

где

$$\Lambda_{[ik]} = 2M^v_{s[i}N^s_{|v|k]}. \qquad (8)$$

Совокупность величин

$$\mathcal{D}^n_{ijk} \overset{def}{=} (m+2)\Lambda^n_{ijk} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{k)} \qquad (9)$$

в силу (2), (4), (7) образует тензор (симметрический по любой паре нижних индексов), который по аналогии с гиперпо-

верхностью [4] назван [3] тензором Дарбу гиперполосы. Согласно [II] обращение в нуль этого тензора есть условие касания 3-го порядка инвариантных соприкасающихся гиперквадрик (см. [9],[II])

$$\Lambda^n_{ij}x^ix^j + \frac{\Lambda_i}{m+2}x^ix^n + B^n_{uv}x^ux^v + 2b_v x^v x^n + S_n(x^n)^2 = 2x^0x^n \qquad (10)$$

с данной гиперполосой $H_m \subset P_n$.

В уравнениях (10) B^n_{uv} – симметрический невырожденный тензор 2-го порядка:

$$\nabla_d B^n_{uv} + B^n_{uv}\,\omega^0_0 = B^n_{uvk}\,\omega^k_0. \qquad (11)$$

Тензор B^n_{uv} имеет строение (см. [II], [9])

$$B^n_{uv} = -\frac{1}{2}\left(\tilde{b}^{nw}_u b_{wv} + \tilde{b}^{nw}_v b_{wu}\right), \qquad (12)$$

где $\tilde{b}^{nw}_u$ – тензор, взаимный невырожденному тензору b^v_{nu}, и

$$b^v_{nu} = b^{ij}_{nu}c^v_{ij}, \quad b^{ij}_{nu} = N^i_{vk}\Lambda^{kj}_n - a^0_v\Lambda^{ij}_n,$$

$$c^v_{ij} = M^v_{ij} - a^v_n\Lambda^n_{ij}, \quad a^0_v = \frac{1}{m}N^k_{vk}, \quad a^v_n = \frac{1}{m}M^v_{ij}\Lambda^{ij}_n, \qquad (13)$$

$$b_{uv} = b^i_{uk}b^k_{vi}, \quad b^i_{vk} = b^{ij}_{nv}\Lambda^n_{jk}, \quad c^{vk}_{ni} = c^v_{ij}\Lambda^{jk}_n.$$

Компоненты b_v, S_n геометрического объекта 3-го порядка $(S_n, \Lambda_i, b_v, \Lambda^n_{ij}, B^n_{uv})$ регулярной гиперполосы имеют следующее строение (см. [9], [II]):

$$b_v = -(B^n_{uv}a^u_n + a^0_v), \quad S_n = \frac{T_n}{m(m+2)} - a^v_n b_v,$$
$$T_n = \left(\Lambda_{ij} - \frac{\Lambda_i\Lambda_j}{m+2}\right)\Lambda^{ij}_n. \qquad (14)$$

Легко убедиться, что каждая из систем величин

$$\mathcal{D}^i_{vk} \overset{def}{=} b^i_{vk} + B^n_{uv} C^{ui}_{nk}, \qquad (a)$$

$$\mathcal{D}^n_{uvk} \overset{def}{=} (m+2) B^n_{uvk} - B^n_{uv}\Lambda_k \qquad (б) \qquad (15)$$

образует тензор соответственно 2-го и 3-го порядка.

3. Гиперполоса $H_m\subset P_n$ называется квадратичной [2],[3], если ее базисная поверхность V_m лежит на неподвижной гиперквадрике Q^2_{n-1}, причем семейством главных касательных гиперплоскостей гиперполосы служит семейство касательных плоскостей гиперквадрики Q^2_{n-1} в точках $A_0\in V_m$; следует заметить, что в работах [2],[3] автором условие квадратичности гиперполосы $H_m\subset P_n$ не найдено.

Если гиперполоса $H_m\subset P_n$ квадратичная, то гиперквадрика Q^2_{n-1}, уравнение которой записывается в виде

$$g_{\bar\jmath\bar\kappa}\, x^{\bar\jmath} x^{\bar\kappa}=0,\quad g_{\bar\jmath\bar\kappa}=g_{\bar\kappa\bar\jmath},\quad \bar\jmath,\bar\kappa=0,1,\dots,n,$$

является соприкасающейся гиперквадрикой в любой своей точке, то есть справедливы равенства (см. [11])

$$g_{00}=g_{0i}=g_{0v}=0,\quad g_{0n}=-1,\quad g_{ij}=\Lambda^n_{ij}, \qquad (16)$$

и, с другой стороны, она неподвижна, а следовательно, $\nabla_d g_{\bar\jmath\bar\kappa}=\theta g_{\bar\jmath\bar\kappa}$ (см. [4]). Развернув последние уравнения с учетом равенств (16) и исключив форму $\theta=g_{in}\omega^i_0-\omega^0_0-\omega^n_n$, получим систему из конечных соотношений и дифференциальных уравнений для коэффициентов $g_{\bar\jmath\bar\kappa}$, выполнение которой является необходимым и достаточным условием вырождения поля соприкасающихся гиперквадрик в одну гиперквадрику:

$$g_{iv}=0, \qquad (17)$$

$$\Lambda^n_{ik}N^k_{vj}+g_{uv}M^u_{ij}+g_{nv}\Lambda^n_{ij}=0, \qquad (18)$$

$$\nabla_d\Lambda^n_{ij}+\Lambda^n_{ij}\omega^0_0=\Lambda^n_{(ij}g_{k)n}\omega^k_0, \qquad (19)$$

$$\nabla_d g_{uv}+g_{uv}(\omega^0_0+\omega^n_n)=g_{uv}g_{kn}\omega^k_0, \qquad (20)$$

$$dg_{in}-g_{kn}\omega^k_i+g_{in}\omega^0_0+\omega^0_i-\Lambda^n_{ik}\omega^k_n = (g_{in}g_{kn}+g_{vn}M^v_{ik}+g_{nn}\Lambda^n_{ik})\,\omega^k_0, \qquad (21)$$

$$dg_{vn}-g_{un}\omega^u_v+g_{vn}\omega^0_0-g_{vu}\omega^u_n+\omega^0_v = (g_{vn}g_{kn}+g_{sn}N^s_{vk})\,\omega^k_0, \qquad (22)$$

$$dg_{nn}-g_{nn}(\omega^n_n-\omega^0_0)-2(g_{nk}\omega^k_n+g_{nv}\omega^v_n-\omega^0_n) = g_{nn}g_{kn}\omega^k_0. \qquad (23)$$

Заметим, что равенства (17) представляют собой условие полярной сопряженности касательной плоскости Π_m базисной поверхности V_m и характеристики Π_{n-m-1} главной касательной гиперплоскости относительно Q^2_{n-1}.

4. Предположим, что справедливы соотношения (17)-(23), то есть гиперполоса $H_m\subset P_n$ - квадратичная. Свертывая равенства (18) с тензором Λ^{ij}_n, с учетом (13) имеем

$$g_{nv}=-(g_{uv}a^u_n+a^0_v);$$

следовательно, равенства (18) теперь с учетом (13) перепишутся в виде

$$g_{uv}c^u_{ik}+b^s_{vi}\Lambda^n_{sk}=0. \qquad (24)$$

Свертывая последние равенства с тензором b^{ik}_{nv} (см. (13)) по индексам i,k, находим $g_{uv}b^u_{nw}+b_{vw}=0$, откуда в силу $g_{uv}=g_{vu}$ и невырожденности тензора b^u_{nw} получим

$$g_{uv}=-\frac{1}{2}\left(\tilde b^{nw}_u\, b_{wv}+\tilde b^{nw}_v\, b_{wu}\right).$$

Сравнивая последние соотношения с (12), имеем $g_{uv}=B^n_{uv}$.

7 Зак. 14409

Теперь легко заметить, что равенства (24) с учетом (13) эквивалентны равенству нулю тензора $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$ (см. (15-а)).

Сравнивая (19) с уравнениями (2), находим $\Lambda_{ijk} = \Lambda^n_{(ij}\, g_{k)n}$, откуда $\Lambda_\kappa = \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{ijk} = (m+2)\, g_{\kappa n}$, то есть $g_{\kappa n} = \frac{\Lambda_\kappa}{m+2}$. Следовательно, $\Lambda^n_{ijk} = \frac{1}{m+2} \Lambda_{(ij}\Lambda_{\kappa)}$, что равносильно равенству нулю тензора Дарбу (см. (9)).

Аналогично, сравнивая (20) и (11), с учетом $g_{uv} = B^n_{uv}$ и $g_{\kappa n} = \frac{\Lambda_\kappa}{m+2}$, получим $B^n_{uv\kappa} = B^n_{uv}\frac{\Lambda_\kappa}{m+2}$, что равносильно равенству нулю тензора $\mathcal{D}^n_{uv\kappa}$ (см. (15-б)).

Итак, необходимым условием квадратичности регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ является равенство нулю тензоров $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$, $\mathcal{D}^n_{ij\kappa}$, $\mathcal{D}^n_{uv\kappa}$:

$$\mathcal{D}^{\kappa}_{vi} = \mathcal{D}^n_{ij\kappa} = \mathcal{D}^n_{uv\kappa} = 0. \qquad (25)$$

5. Докажем достаточность условия (25), то есть покажем, что при выполнении этого условия поле соприкасающихся гиперквадрик (10) вырождается в одну неподвижную гиперквадрику Q^2_{n-1} пространства P_n.

Для соприкасающихся гиперквадрик (10) условие (17) выполнено; соотношения (18)-(23) в силу $g_{uv} = B^n_{uv}$, $g_{\kappa n} = \frac{\Lambda_\kappa}{m+2}$, $g_{vn} = b_v$, $g_{nn} = S_n$ перепишутся в виде:

$$\Lambda^n_{ij} N^j_{v\kappa} + B^n_{uv} M^u_{i\kappa} + b_v \Lambda^n_{i\kappa} = 0, \qquad (26)$$

$$\nabla_d \Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\,\omega^0_0 = \frac{1}{m+2}\Lambda^n_{(ij}\Lambda_{\kappa)}\,\omega^\kappa_0, \qquad (27)$$

$$\nabla_d B^n_{uv} + B^n_{uv}\,\omega^0_0 = B^n_{uv}\frac{\Lambda_\kappa}{m+2}\,\omega^\kappa_0, \qquad (28)$$

$$\nabla_d \Lambda_i + \Lambda_i\,\omega^0_0 + (m+2)\,(\omega^0_i - \Lambda^n_{ij}\,\omega^j_n) = $$
$$= \Big[\frac{\Lambda_i \Lambda_j}{m+2} + (m+2)\, b_v M^v_{ij} + (m+2)\, S_n \Lambda^n_{ij}\Big]\,\omega^j_0, \qquad (29)$$

$$\nabla_d b_v + b_v\,\omega^0_0 - B^n_{vw}\,\omega^w_n + \omega^0_v = \frac{\Lambda_\kappa}{m+2}\,\omega^\kappa_v + b_v\frac{\Lambda_\kappa}{m+2}\,\omega^\kappa_0, \qquad (30)$$

$$dS_n - S_n(\omega^n_n - \omega^0_0) - 2\Big(\frac{\Lambda_\kappa}{m+2}\,\omega^\kappa_n + b_v\,\omega^v_n - \omega^0_n\Big) = \frac{S_n\Lambda_\kappa}{m+2}\,\omega^\kappa_0. \qquad (31)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (26)-(28) удовлетворяются в силу (2), (9), (11)-(15), (25).

Покажем справедливость уравнений (29). Продифференцировав соотношения $(m+2)\Lambda^n_{ij\kappa} - \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{\kappa)}$ (см. (9), (25)), с использованием (2), (4), (6), (7), находим

$$(m+2)\,(\tilde{\Lambda}^n_{ij\kappa t} + \Lambda^n_{s(i} M^v_{j\kappa)} N^s_{vt}) =$$
$$= \frac{1}{m+2}\big(2\Lambda^n_{t(i}\Lambda_j\Lambda_{\kappa)} + \Lambda_t\Lambda^n_{(ij}\Lambda_{\kappa)} + \Lambda^n_{(ij}\Lambda_{\kappa)t}\,;$$

свертывая последнее с $\Lambda^{\kappa t}_n$, с учетом (14), имеем:

$$(m+2)\big(\Lambda^{\kappa t}_n \tilde{\Lambda}^n_{ij\kappa t} + M^v_{s(i} N^s_{|v|j)} + m\, a^0_v M^v_{ij}\big) = 2\Lambda_i\Lambda_j +$$
$$+ \frac{2}{m+2}\,(\Lambda_i\Lambda_j + \Lambda^n_{ij}\Lambda^{\kappa t}_n \Lambda_\kappa \Lambda_t) + \Lambda^n_{ij} T_n + 2\Lambda_{ij}. \qquad (32)$$

Заметим, что из (32) непосредственно следует $\Lambda_{[ij]} = 0$, то есть с учетом (8) справедливо

$$M^v_{s[i} N^s_{|v|j]} = 0. \qquad (33)$$

С другой стороны, из дифференциальных уравнений (7) для $\Lambda_\kappa = \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{ij\kappa}$ с использованием (1), (4), (6) находим

$$\Lambda_{ij} = \Lambda^{\kappa t}_n \Lambda^n_{\kappa t ij} - \Lambda^{\kappa \ell}_n \Lambda^{ts}_n \Lambda^n_{\kappa t i}\Lambda^n_{\ell s j} + m\Lambda^n_{si} a^v_n N^s_{vj} + 2M^v_{si} N^s_{vj}.$$

Исключив из последних выражений и выражений (32) величины $\Lambda^{\kappa t}_n \tilde{\Lambda}^n_{ij\kappa t}$ и имея в виду (33), $\mathcal{D}^n_{ij\kappa} = 0$, находим

$$\Lambda_{ij} = \frac{\Lambda_i\Lambda_j}{m+2} + \frac{\Lambda^n_{ij} T_n}{m} + (m+2)\big(\Lambda^n_{si} a^v_n N^s_{vj} - a^0_v M^v_{ij}\big). \qquad (34)$$

Теперь нетрудно показать, что уравнения (29) удовлетворяются. Действительно, для этого согласно (7), (13), (14), (29)

(34) должно выполняться

$$C^{v}_{ij} B^{n}_{uv} a^{u}_{n} + \Lambda^{n}_{si} a^{v}_{n} b^{s}_{vj} = 0,$$

что справедливо в силу $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi} = 0$ (см. (15-а), (25)).

Остается проверить справедливость уравнений (30), (31). Для этого продифференцируем внешним образом уравнения

$$\Lambda^{n}_{ij}\,\omega^{j}_{v} + B^{n}_{uv}\,\omega^{u}_{i} + b_{v}\,\omega^{n}_{i} = 0,$$

равносильные соотношениям (26); имея в виду (28), получим

$$\Big(\nabla_{d} b_{v} + b_{v}\omega^{o}_{o} - B^{n}_{wv}\,\omega^{w}_{n} + \omega^{o}_{w} - \frac{1}{m+2}\Lambda_{\kappa}\omega^{\kappa}_{v} - b_{v}\frac{\Lambda_{\kappa}\omega^{\kappa}_{o}}{m+2}\Big)\wedge\omega^{n}_{i} = 0,$$

откуда в силу линейной независимости форм ω^{n}_{i} и следует (30). Аналогично, продолжая уравнения (29) и имея в виду (30), убеждаемся в справедливости уравнения (31).

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. Одновременное обращение в нуль тензоров $\mathcal{D}^{n}_{ij\kappa}$, $\mathcal{D}^{\kappa}_{vi}$, $\mathcal{D}^{n}_{uv\kappa}$ является необходимым и достаточным условием квадратичности m-мерной регулярной гиперполосы погруженной в n-мерное проективное пространство.

Согласно этой теореме, касание 3-го порядка (то есть равенство нулю тензора Дарбу $\mathcal{D}^{n}_{ij\kappa}$) соприкасающихся гиперквадрик (10) с гиперполосой $H_m \subset P_n$ не служит достаточным условием ее квадратичности (для этого требуется касание порядка выше третьего).

Список литературы

1. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос.- "Тр. семин. по векторн. и тенз. анализу", 1950, вып.8, с.197-272.

2. В а с и л я н М.А. Квадратичные гиперполосы ранга $n-2$ в проективном пространстве P_n.-"ДАН АрмССР", 1970, 50, № 4, с.193-197.

3. В а с и л я н М.А. Проективная теория многомерных гиперполос.-"Изв. АН Арм.ССР, Матем.", 1971, т.6, № 6, с.477--481.

4. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.-"Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

5. П о п о в Ю.И. Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n.-"Учен.зап. Калинингр. ун-та", 1968, вып.1, с.27-57.

6. П о п о в Ю.И. К теории оснащенной регулярной гиперполосы в многомерном проективном пространстве.-"Учен.зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В.И.Ленина", 1970, № 374, т.I, с.102--117.

7. П о п о в Ю.И. Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n.-"Учен.зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та", 1971, вып.30, с.286-296.

8. П о п о в Ю.И. Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства.-В кн: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.81-96.

9. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы.-"Изв. вузов. Матем.", 1975, № 10, с. 97-99.

10. С т о л я р о в А.В. Условие квадратичности регулярной гиперполосы.-"Изв. вузов. Матем.", 1975, № 11, с. 106-108.

11. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения - мерных линейных элементов.-"Итоги науки и техники. Серия "Проблемы геометрии", 1975, т.7, с.117-151. (Ин-т научн. информ. АН СССР).