УДК 514.75

М. В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОМПЛЕКСЫ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ В ТОЧКУ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) центральных невырожденных квадрик с вырождающимся в точку многообразием центров. Показано, что такие комплексы существуют. Найдены геометрические свойства исследуемых многообразий.

Отнесем комплекс K_{30} центральных невырожденных квадрик q с вырождающимся в точку многообразием центров к реперу R={A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$}, где A — центр квадрики q, построенному в работе [1]. Принимая формы $\theta^1 = \omega_1^2 + \omega_2^1$, $\theta^2 = \omega_2^3 + \omega_3^2$, $\theta^3 = \omega_1^3 + \omega_3^1$ за независимые первичные, запишем систему дифференциальных уравнений комплекса K_{30}:

$$\omega_i^i = A_{ij}\theta^j, \ \omega^i = 0$$

$$(i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3 \text{ по } i \text{ не суммировать!}). \qquad (1)$$

Определение 1. *Комплекс K_{30}, в котором на квадрике q имеется, по крайней мере, три фокальные точки [2] A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяют три сопряженных направления, называются комплексом K^*_{30}.*

Теорема 1. *Комплексы K^*_{30} существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента.*

Доказательство. Специализируем репер R таким образом, чтобы концы векторов $\bar{e}_i$ совпадали, соответственно, с фокальными точками A_i квадрик q. Такой репер будет каноническим. Принимая формы $\theta^1 = \omega_2^1$, $\theta^2 = \omega_3^2$ и $\theta^3 = \omega_3^1$ за базис, получаем, что система уравнений Пфаффа комплекса K_{30}^* имеет вид:

$$\omega_i^i = 0,\ \omega^i = 0,\ \omega_1^2 = \alpha\theta^1,\ \omega_1^3 = \beta\theta_1^3,\ \omega_2^3 = \gamma\theta^2. \qquad (2)$$

Замкнутая система (2) в инволюции [3] и определяет комплексы с произволом трех функций одного аргумента.

Определение 2. *Линии, огибаемые на поверхности* (A_i) *прямыми, параллельными* $[A,\ A_{i+1}]$, *назовем линиями* Γ_{i+2}, *где* $i+3 \overset{def}{=} i$.

Теорема 2. *Комплексы* K_{30}^* *обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) касательные плоскости к поверхностям (A_i) *в точках* A_i *параллельны, соответственно, координатным плоскостям* $(A, \bar{e}_j, \bar{e}_k)$, *где* $j,k \neq i$;

2) прямые $(A, \bar{e}_i)$ *описывают конические поверхности;*

3) координатные плоскости $(A, \bar{e}_i, \bar{e}_j)$, $i < j$, *неподвижны при движении точки* A_k *вдоль линии* Γ_{k+2}, *а точки* A_{k+1} *вдоль линии* Γ_k, *где* $k \neq i, j$; $k+3 \overset{def}{=} k$.

Доказательство. Из системы уравнений (2) следует:

$$d\bar{e}_1 = \alpha\theta^1\bar{e}_2 + \beta\theta^3\bar{e}_3,\ d\bar{e}_2 = \theta^1\bar{e}_1 + \gamma\theta^2\bar{e}_3,\ d\bar{e}_3 = \theta^3\bar{e}_3 + \theta^2\bar{e}_2, \qquad (3)$$

откуда вытекает справедливость первых двух утверждений теоремы.

Пусть $M_1 = A + X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2$, $M_2 = A + X^1\bar{e}_1 + X^3\bar{e}_3$ и $M_3 = A + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3$ — текущие точки, соответственно, координатных плоскостей (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$), (A, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$) и (A, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$). Тогда:

$$d\overline{M_1} = (dX^1 + X^2\theta^1)\bar{e}_1 + (dX^2 + \alpha X^1\theta^1)\bar{e}_2 + (\beta X^1\theta^3 + \gamma X^2\theta^2)\bar{e}_3,$$
$$d\overline{M_2} = (dX^1 + X^3\theta^3)\bar{e}_1 + (X^3\theta^2 + \alpha X^1\theta^1)\bar{e}_2 + (dX^3 + \beta X^1\theta^3)\bar{e}_3, \quad (4)$$
$$d\overline{M_3} = X^2\theta^1\bar{e}_1 + (dX^2 + X^3\theta^2)\bar{e}_2 + (dX^3 + \gamma X^2\theta^2)\bar{e}_3.$$

Теорема доказана.

Имеют место теоремы:

Теорема 3. *Характеристическое многообразие [2] состоит из четырех двукратных объектов [4]: точки A и прямых (A, $\bar{e}_i$).*

Теорема 4. *Фокальное многообразие состоит из шести точек, три из которых являются концами векторов $\bar{e}_i$, а остальные диаметрально им противоположны.*

Определение 3. *Комплексом K_c называется трехпараметрическое семейство невырожденных центральных квадрик — такое, что фокальное многообразие квадрик семейства содержит конику.*

Будем обозначать конику, принадлежащую фокальному многообразию квадрики q, через c.

Теорема 5. *Комплекс K_c является подклассом комплекса K_{30} и определяется вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений Пфаффа.*

Доказательство. Рассмотрим комплекс K_c в репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где A — центр квадрики q, концы A_i векторов $\bar{e}_i$ лежат на рассматриваемой квадрике q, векторы $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ расположены в плоскости коники c и сопряжены относительно этой коники, вектор $\bar{e}_1$ сопряжен плоскости коники c относительно квадрики q. Уравнение квадрики q в выбранном репере имеет вид:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Из уравнения стационарности квадрики q находим:

$$\pi^i = 0\,,\ \pi_i^i = 0\,,\ \pi_i^j + \pi_j^i = 0\,, \tag{6}$$

где $i < j$ (по i не суммировать!). Тогда формы ω^i, ω_i^i, $\omega_i^j + \omega_j^i$ являются главными.

Коника c определяется уравнениями:

$$(X^2)^2 + (X^3)^2 - 1 = 0\,,\ X^1 = 0\,. \tag{7}$$

Из определения комплекса K_c следует, что

$$dq\big|_{X^1=0} = \lambda c\,, \tag{8}$$

откуда получаем

$$\omega^2 = 0\,,\ \omega^3 = 0\,,\ \omega_2^3 = 0\,,\ \omega_3^3 = 0\,,\ \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0\,. \tag{9}$$

Используя уравнение стационарности коники c, находим:

$$\pi_1^2 = 0\,,\ \pi_1^3 = 0\,,\ \pi_2^3 = 0\,,\ \pi_3^3 = 0\,,\ \pi_3^2 + \pi_2^3 = 0\,. \tag{10}$$

Из формул (6) и (10) следует, что формы:

$$\omega^i\,,\ \omega_i^i\,,\ \omega_i^j\,,\ \omega_2^3 + \omega_3^2\,, \tag{11}$$

где $i \neq j$, $i \neq 2$, $j \neq 2$ (по i не суммировать!), являются главными формами комплекса K_c. Система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_c имеет вид:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0\,,\ \omega^1 = A_i^1\theta^i\,,$$

$$\omega_2^1 = A_{2i}^1\theta^i\,,\ \omega_3^1 = A_{3i}^1\theta^i\,, \tag{12}$$

где $\theta^1 = \omega_1^1$, $\theta^2 = \omega_1^2$, $\theta^3 = \omega_1^3$. После замыкания соответствующих уравнений системы (12) получаем окончательную систему дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_c:

$$\omega^i = \omega_j^j = \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0\,,\ \omega_j^1 = \alpha\theta^j\,,\ d\alpha = -2\alpha\theta^1\,, \tag{13}$$

где $j > 1$ (по j не суммировать!). Чистое замыкание системы (13) обращается в тождество. Из системы (13) непосредственно следует, что K_c является подклассом комплекса K_{30}. Теорема доказана.

Теорема 6. *Коники c принадлежат стационарной квадрике Q, и квадрика q комплекса K_c касается Q вдоль c.*

Доказательство. Рассмотрим квадрику Q, заданную следующим уравнением:

$$(X^1)^2 - \alpha((X^2)^2 + (X^3)^2 - 1) = 0 . \qquad (14)$$

Из уравнений (13) следует, что

$$dQ = -2\theta^1 Q . \qquad (15)$$

Учитывая уравнения (13) и (15), убеждаемся в том, что квадрика Q стационарна и касается квадрики q вдоль коники c.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 1979. Вып. 10. С. 41—47.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Там же. 1974. Вып. 6. С. 113—133.

3. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

4. *Малаховский В.С.* Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. «Алгебра. Топология. Геометрия». Итоги науки / ВИНИТИ АН СССР. М., 1972. С. 115—160.

M. Kretov

COMPLEXES OF QUADRICS WITH VARIETY OF THE CENTERS DEGENERATING INTO THE POINT

In three-dimensional affine space complexes (three-parametrical families) of central non-degenerate quadrics with variety of the centers degenerating in a point are considered. It is shown, such complexes exist. Geometrical properties of researched varieties are found.