Полагаем теперь $Ric_M \leq 0$, тогда из второй формулы следует, что либо $\mathcal{E}=0$, либо $n=2$, т.е. $codim\ ker\ \pi_* = 1$. В обоих случаях (M,g) будет локально римановым произведением слоев $ker\ \pi_*$ и $ker\ \pi_*^{\perp}$.

С другой стороны, при $K_M \geq 0$ согласно основной теореме работы [9] полное многообразие (M,g) будет локальным римановым произведением слоев $ker\ \pi_*$ и $ker\ \pi_*^{\perp}$ только потому, что одно из слоений $ker\ \pi_*$ – вполне геодезическое. В той же работе [9] есть следствие, согласно которому при $Ric_M \geq 0$ полное многообразие (M,g) будет локальным произведением слоев $ker\ \pi_*$ и $ker\ \pi_*^{\perp}$ только потому, что $codim\ ker\ \pi_*^{\perp}=1$ и $ker\ \pi_*$ – состоит из геодезических. Последнее доказывает утверждение (а) следствия.

4. Рассмотрим проективную иммерсию $\tau : (M,g) \to (M',g')$. Тогда $rank\ \tau_* = dim\ M$ всюду на (M,g), т.е. τ будет проективным отображением максимального ранга. Согласно [4] тензорное поле $\overset{*}{g} = \tau^* g'$ удовлетворяет уравнению

$$(\nabla_Z \overset{*}{g})(X,Y) = 2\omega(Z)\overset{*}{g}(X,Y) + \omega(X)\overset{*}{g}(Z,Y) + \omega(Y)\overset{*}{g}(X,Z)$$

для любых векторных полей X, Y и Z на (M,g). При этом $G = det\,\|\overset{*}{g}\| \neq 0$. Обозначим через G^{ij} алгебраическое дополнение элемента $\overset{*}{g}_{ij}$ матрицы $\|\overset{*}{g}_{**}\|$, тогда

$$X(G) = G^{ij}\nabla_X \overset{*}{g}_{ij},$$

что на основании приведенного уравнения дает

$$X(\ln G) = 2(n+1)\,\omega(X).$$

Следовательно, $\omega = grad\ \varphi$, где $\varphi = [2(n+1)]^{-1}\ln G$. Тензорное поле $A = e^{-3\varphi}\overset{*}{g}$ удовлетворяет в этом случае уравнению $(\nabla_X A)(X,X)=0$. На компактном римановом многообразии (M,g) неположительной секционной кривизны такое тензорное поле параллельно [10, с.613]. В нашем случае равенство $\nabla A = 0$ приводит к условию $\varphi = const$, которое означает, что $\tau : (M,g) \to (M',g')$ – аффинное отображение.

Библиографический список

1. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

2. Nomidzu K. Pinkall U. On the geometry of projective immersion // J. Math. Soc. Japan. 1989. Vol. 41. N4. P. 607–623.

3. Podestá F. Projective submersions // Bull. Austral. Math Soc. 1991. Vol. 43. N2. P. 251–256.

4. Nore T. Second fundamental form of a map // Ann. mat pur. ed appl. 1987. N146. P. 281–310.

5. Степанов С.Е. Римановы структуры почти произведения и отображения постоянного ранга // Геометрия и анализ/ Кемеровский ун-т. Кемерово, 1991. С.39–41.

6. Кручкович Г.И. Признаки почти полуприводимых римановых пространств // Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. М., 1966. Вып. XIII. С.399–406.

7. Степанов С.Е. Об одном классе римановых структур почти произведения // Изв. вузов. Математика. 1989. № 7. С.40–46.

8. Tanno S. A theorem on totally geodesic foliations and its applications // Tensor, N.S. 1972. Vol. 24. P. 116–122.

9. Brito F., Walczak P. Totally geodesic foliations integrable normal bundles // Bol. Soc. Bras. Mat. 1989. Vol. 17. N1. P. 41–46.

10. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т.2.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ n-ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_{n+m}

М.А.Чешкова

(Алтайский государственный университет)

Диффеоморфизм $f : M \to M'$ n-поверхностей в E_{n+m} индуцирует на M метрику $\bar{g}(X,Y) = (dfX, dfY)$. Изучается тензор деформации связностей Леви-Чивита исходной и индуцируемой метрики на M.

Пусть M, M' – гладкие n-поверхности в E_{n+m}, $f : M \to M'$ – диффеоморфизм, $p \in M$, $q = f(p) \in M'$. Перенесем векторы $(dfX)_q$, где $X_p \in T_pM$, параллельно в точки $p = f^{-1}(q)$, обозначим их $(dfX)_p$ и разложим на касательные и нормальные составляющие. Имеем

$$\underline{d}fX = FX + \omega X, \qquad (1)$$

где $(FX)_p \in T_p M, \quad (\omega X)_p \in T_p^{\perp} M$.

Положим $\vec{pq} = \ell_p$. Тогда [1]:

$$FX = X - AX + \nabla_X a, \quad \omega X = \alpha(X, a) + \nabla_X^{\perp} \xi, \tag{2}$$

где

$$\ell = a + \xi, \quad a \in TM, \quad \xi \in T^{\perp} M,$$

∇ - связность Леви-Чивита на M, $A = A_\xi$ - оператор Вейнгартена, соответствующий ξ, α - вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$ - нормальная связность.

Используя формулы Гаусса-Вейнгартена [2] для поверхности M:

$$\mathcal{D}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \quad \mathcal{D}_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^{\perp} \eta, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}$ - дифференцирование в A_{n+m}, находим [1]

$$\begin{aligned} &(dF)(X,Y) = A_{\omega Y} X - A_{\omega X} Y, \\ &(d^{\perp}\omega)(X,Y) = \alpha(Y, FX) - \alpha(X, FY), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$(dF)(XY) = \nabla_X FY - \nabla_Y FX - F[X,Y],$$

$$(d^{\perp}\omega)(X,Y) = \nabla_X^{\perp} \omega Y - \nabla_Y^{\perp} \omega X - \omega[X,Y]$$

- внешние дифференциалы полей F, ω в соответствующих связностях.

Если $\operatorname{rang} F_p = n, \forall p \in M$, то векторные пространства $T_p^{\perp} M$ и $T_{f(p)} M'$ не имеют общих векторов. Тогда оснастив M' пространствами $T_p^{\perp} M$, мы получим на M' некоторую связность ∇'. Отображение f индуцирует из ∇' на M связность $\overline{\nabla}'$. Связность $\overline{\nabla}'$ характеризуется свойством, что разность

$$\beta(X,Y)_p = (\mathcal{D}_X \underline{df} Y - \underline{df} \overline{\nabla}'_X Y)_p \tag{5}$$

принадлежит $T_p^{\perp} M$.

Используя (I) - (3), (5), находим [1]:

$$\begin{cases} \overline{\nabla}'_X Y = \nabla_X^F Y - F^{-1} A_{\omega Y} X, \\ \beta(X,Y) = (\mathcal{D}'_X \omega)(Y) + \alpha(X, FY), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$(\mathcal{D}'_X \omega)(Y) = \nabla_X^{\perp} \omega Y - \omega(\overline{\nabla}'_X Y),$$

$$\nabla_X^F Y = F^{-1} \nabla_X FY$$

связность [3], F- сопряженная связности ∇. В силу (4)

имеем, что кручение связности $\overline{\nabla}'$ равно нулю и $\beta(X,Y) = \beta(Y,X)$.

Первая g' и вторая α' фундаментальные формы поверхности M' индуцируют на M формы $\overline{g}, \overline{\alpha}$. Определим их:

$$\overline{g}(X,Y) = (\underline{df} X, \underline{df} Y) = g(FX, FY) + g^{\perp}(\omega X, \omega Y).$$

Пусть $\overline{\nabla}$ - связность Леви-Чивита метрики $\overline{g}$, $P = \overline{\nabla} - \overline{\nabla}'$ - тензор деформации. Рассмотрим разность

$$\mathcal{D}_X \underline{df} Y - \underline{df} \overline{\nabla}_X Y = \mathcal{D}_X \underline{df} Y - \underline{df}(\overline{\nabla}'_X Y + P(X,Y)) =$$

$$= \beta(X,Y) - \underline{df} P(X,Y) = \beta(X,Y) - FP(X,Y) - \omega P(X,Y).$$

Таким образом,

$$\overline{\alpha}(X,Y) = \beta(X,Y) - \omega P(X,Y) - FP(X,Y). \tag{7}$$

Обозначим $\overline{\alpha}^T, \overline{\alpha}^{\perp}$ - касательные и нормальные составляющие $\overline{\alpha}$. Тогда из (7) вытекает

Т е о р е м а I. Имеют место соотношения

$$\begin{cases} \overline{\alpha}^T(X,Y) = -FP(X,Y), \\ \overline{\alpha}^{\perp}(X,Y) = \beta(X,Y) - \omega(X,Y). \end{cases} \tag{8}$$

С л е д с т в и е I. Связность Леви-Чивита метрики $\overline{g}$ имеет вид

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + F^{-1}((\nabla_X F)(Y) - A_{\omega Y} X - \overline{\alpha}^T(X,Y)). \tag{9}$$

С л е д с т в и е 2. Следующие утверждения эквивалентны:

I) $\overline{\nabla} = \nabla$, 2) $\overline{\alpha}^T(X,Y) = (\nabla_X F)(Y) - A_{\omega Y} X$.

Т е о р е м а 2. Тензор деформации P определяется равенством

$$g^{\perp}(\beta(X,Y), \omega Z) - \overline{g}(P(X,Y), Z) = 0. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(\overline{\nabla}_Z \overline{g})(X,Y) = Z\overline{g}(X,Y) - \overline{g}(\overline{\nabla}_Z X, Y) - \overline{g}(X, \overline{\nabla}_Z Y) = 0.$$

Используя (3), (6) и соотношение

$$g(A_{\omega X} Z, FY) = g^{\perp}(\alpha(Z, FY), \omega X),$$

получим

$$g^{\perp}(\beta(Z,X), \omega Y) + g^{\perp}(\beta(Z,Y), \omega X) -$$

$$- \overline{g}(P(Z,X), Y) - \overline{g}(P(Z,Y), X) = 0.$$

Так как связности $\overline{\nabla}, \overline{\nabla}'$ имеют нулевые кручения, то $P(X,Y) = P(Y,X)$. Кроме того, $\beta(X,Y) = \beta(Y,X)$. Откуда получаем (10).

Если M, M' параллельные поверхности, т.е. $\omega = 0$, то из (9), (10) следует

$$P = 0, \quad \bar{\nabla} = \nabla^F, \quad \bar{P}(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = F^{-1}(\nabla_X F)(Y).$$

Таким образом имеет место

Следствие 3. Если M, M' параллельные поверхности, то

$$\bar{\nabla} = \nabla^F, \quad \bar{P}(X,Y) = F^{-1}(\nabla_X F)(Y).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда M, M' - гиперповерхности в E_{n+1}. Тогда $\omega X = \sigma(X) n$, где n -единичный вектор нормали к M, $\sigma(X) = b(X,a)$, $b \in T_2^0(M)$ - асимптотический тензор гиперповерхности M,

$$\beta(X,Y) = \tilde{b}(X,Y) n, \quad \tilde{b}(X,Y) = (\bar{\nabla}'_X \sigma)(Y) + b(X,FY).$$

Тогда из (10) следует

$$\sigma(X) \tilde{b}(Z,Y) = \bar{g}(P(Z,Y),X).$$

Введем в рассмотрение вектор C, где $\sigma(X) = g(X,C)$. Тогда

$$P(X,Y) = \tilde{b}(X,Y) C,$$

$$\bar{P}(X,Y) = F^{-1}((\nabla_X F)(Y) - \sigma(Y) AX - \tilde{b}(X,Y) FC).$$

Библиографический список

1. Чешкова М.А. О связностях, индуцируемых отображением поверхностей в евклидовом пространстве // Геометрия многомерных пространств: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Алтайский ун-т. Барнаул, 1991. С.82-86.

2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т.2. 414 с.

3. Ведерников С.В. Геометрия пространств пар // Известия АН БССР. Минск, 1980. 39 с. Деп. в ВИНИТИ 25.02.80. № 1454.

УДК 514.76

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВ $V_n(K)$

И.Г.Шандра

(Государственная финансовая академия)

В работе показано, что эквидистантные псевдоримановы пространства могут быть разбиты на два непересекающихся класса, замкнутых относительно геодезических отображений. Доказано, что множество решений основных уравнений пространства $V_n(K)$ образует йорданову алгебру, изоморфную (в случае $K \neq 0$) алгебре параллельных симметрических билинейных форм на некотором $(n+1)$-мерном псевдоримановом пространстве.

§ 1. Предварительные сведения

1. Пусть (V_n, g) - n-мерное псевдориманово пространство. Ковекторное поле φ_i на V_n называется конциркулярным, если оно удовлетворяет условиям:

$$\nabla_j \varphi_i = \rho g_{ij} \quad (i,j = 1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

где ∇ - ковариантная производная относительно связности Леви-Чивита, а ρ - некоторый инвариант. Если $\rho \neq 0$, то говорят, что конциркулярное поле принадлежит к основному типу, если $\rho = 0$, то - к исключительному. Если для ρ имеют место условия $\nabla_i \rho = K \varphi_i$, где K - некоторая константа, то конциркулярное поле называется специальным [1].

Псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярное поле, называются эквидистантными [2]. Эквидистантные пространства, допускающие конциркулярное поле основного типа, мы будем называть пространствами основного типа, а допускающие только лишь ковариантно постоянные поля - исключительного типа.

2. Пусть псевдориманово пространство (V_n, g) допускает геодезическое отображение на некоторое псевдориманово пространство $(\bar{V}_n, \bar{g})$, тогда объекты связностей этих пространств удовлетворяют следующим соотношениям [2]:

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \psi_{(j} \delta^i_{k)}, \tag{2}$$

где $\psi_j (= \nabla_j \psi)$ - некоторое градиентное ковекторное поле. В случае, когда $\psi_j \neq 0$, геодезическое отображение называется нетривиальным (НГО).

Для того, чтобы псевдориманово пространство (V_n, g) допускало НГО, необходимо и достаточно, чтобы на нем существовало невырожденное тензорное поле $a_{ij} (= a_{ji})$, удовлетворяющее условиям [2]:

$$\nabla_k a_{ij} = \lambda_{(i} g_{j)k}, \tag{3}$$

при некотором ковекторе $\lambda_i \neq 0$. Ковекторы λ_i и ψ_i связаны соотношениями [2]: