квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с общей вершиной $K=\lambda A_3-A_4$ и общей прямолинейной образующей A_1K.

Семейство прямых A_3A_4 в этом случае является однопараметрическим, так как

$$d[A_3A_4]=(\omega_3^3+\omega_4^4)[A_3A_4]+\omega_3^1([A_1A_4]-\lambda[A_1A_3]).$$

Рассмотрим плоскость $(A_1A_2K^*)$, где K^* вместе с K гармонически разделяет вершины A_3 и A_4. Эта плоскость описывает двупараметрическое семейство и пересекает конусы Q_1 и Q_2 соответственно по коникам

$$C^*:\begin{cases}2(x^4)^2-x^1x^2=0,\\ x^3-\lambda x^4=0;\end{cases}\qquad C^{**}:\begin{cases}4(x^4)^2-2x^1x^2-(a_2x^2)^2=0,\\ x^3-\lambda x^4=0,\end{cases}$$

каждая из которых описывает конгруэнцию.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции (C^*) и (C^{**}) коник C^* и C^{**} соответственно расслояемы к однопараметрическому семейству прямых A_3A_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия расслоения от конгруэнций (C^*) и (C^{**}) к линейчатому многообразию (A_3A_4) удовлетворяются тождественно, что и доказывает теорему.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Е.П.С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК В П-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В п-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрены $(n-1)$-мерные многообразия (конгруэнции) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q. Исследованы поля некоторых геометрических объектов на V_{n-1}. Для конгруэнций эллипсоидов в A_3, имеющих фокальную конгруэнцию коник с центром в центре эллипсоидов, получено безынтегральное представление.

§I. Поля геометрических объектов на многообразии V_{n-1}

Отнесем конгруэнцию V_{n-1} к реперу $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\dots,\bar e_n\}$, где A -центр гиперквадрики Q Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar A=\omega^\alpha\bar e_\alpha,\quad d\bar e_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar e_\beta\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,n),\tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha,\quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta.\tag{1.2}$$

Уравнение гиперквадрики Q запишется в виде

$$F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0,\tag{1.3}$$

$$\det\|a_{\alpha\beta}\|\neq 0,\quad a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.\tag{1.4}$$

Исключая из рассмотрения конгруэнции V_{n-1} с вырождающейся гиперповерхностью центров (A), примем ω^i $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$ за независимые первичные формы конгруэнции. Система уравнений Пфаффа конгруэнции V_{n-1} принимает вид:

$$d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta = b_{\alpha\beta,i}\,\omega^i\ ,\quad \omega^n = c_i\,\omega^i. \qquad (1.5)$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символом π^β_α значения форм ω^β_α при фиксированных первичных параметрах. Продолжая систему (I.5), находим:

$$\delta a_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha + a_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta\ ,\quad \delta c_i = c_\kappa \pi^\kappa + c_\kappa c_i \pi^\kappa_n - c_i \pi^n_n - \pi^n_i,$$

$$\delta b_{\alpha\beta,i} = b_{\gamma\beta,i}\pi^\gamma_\alpha + b_{\alpha\gamma,i}\pi^\gamma_\beta + b_{\alpha\beta,\kappa}\cdot(\pi^\kappa_i + c_i\,\pi^\kappa_n). \qquad (1.6)$$

Фундаментальный объект $\Gamma = \{a_{\alpha\beta}; b_{\alpha\beta,i}; c_i\}$ является основным объектом конгруэнции V_{n-1} ([I], стр.325). Подобъект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет гиперквадрику Q, а подобъект $\{c_i\}$ – касательную гиперплоскость к гиперповерхности центров. Действительно,

$$d\bar{A} = \omega^i(\bar{e}_i + c_i\bar{e}_n). \qquad (1.7)$$

Из (I.6) следует, что совокупность компонент $b_{\alpha\beta,i}$ не образует самостоятельного геометрического объекта, но тождественное равенство нулю всех компонент $b_{\alpha\beta,i}$ имеет инвариантный смысл.

Рассмотрим одномерные инвариантные алгебраические многообразия $M^{(\alpha)}_1$, определяемые соответственно уравнениями

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \dots = \mathcal{F}_{n-1} = 0, \qquad (1.8)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{n-1} = 0, \qquad (1.9)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \dots = \Psi_{n-1} = 0, \qquad (1.10)$$

где

$$\Phi_i = b_{\alpha\beta,i}\,x^\alpha x^\beta,\ \Psi_i = (a_{\alpha i} + a_{\alpha n} c_i)x^\alpha,\ \mathcal{F}_i = \Phi_i - 2\Psi_i. \qquad (1.11)$$

Многообразие $M^{(1)}_1$ является характеристическим многообразием ранга 1. конгруэнции V_{n-1} [2, с.II7], многообразие $M^{(3)}_1$ – это диаметр гиперквадрики Q, сопряженный относительно Q касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров (A), а многообразие $M^{(2)}_1$ принадлежит пучку с базисными кривыми $M^{(1)}_1$ и $M^{(3)}_1$. На конгруэнции V_{n-1} определяются поля геометрических объектов $\{\hat{h}^\alpha_\varepsilon\}$ и $\{b_i, c_j\}$, где

$$\hat{h}^\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon h^\alpha}{h}\ ,\ h^\alpha = a^{\alpha n} - a^{\alpha i} c_i\ ,\ h = \sqrt{a_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta},\ \varepsilon^2 = 1, \qquad (1.12)$$

$$b_i = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta,i}\ ,\quad a^{\beta\gamma} a_{\gamma\alpha} = \delta^\beta_\alpha\ . \qquad (1.13)$$

Имеем

$$\delta h^\alpha_\varepsilon = -h^\beta_\varepsilon \pi^\alpha_\beta\ ,\ \delta b_i = b_\kappa \pi^\kappa_i + b_\kappa c_i \pi^\kappa_n\ . \qquad (1.14)$$

Тензоры $\{h^\alpha_1\}$ и $\{h^\alpha_{-1}\}$ определяют инвариантные точки

$$\bar{M}_1 = \bar{A} + h^\alpha_1 \bar{e}_\alpha,\ \bar{M}_{-1} = \bar{A} + h^\alpha_{-1}\bar{e}_\alpha, \qquad (1.15)$$

являющиеся точками пересечения диаметра $M^{(3)}_1$ с квадрикой Q.

Геометрический объект $\{b_i, c_j\}$ определяет инвариантную (n-2)-мерную плоскость

$$b_i x^i = 0\ ,\quad x^n - c_i x^i = 0\ , \qquad (1.16)$$

лежащую в касательной гиперплоскости к гиперповерхности и проходящую через центр A гиперквадрики Q.

О п р е д е л е н и е I. Направление

$$\omega^i = \lambda^i\theta\ ,\ \lambda^n = c_i\lambda^i, \qquad (1.17)$$

где θ – параметрическая форма [3, с.4I], называется аффинно-главным направлением на поверхности (A) конгруэнции V_{n-1}, если диаметр $x^\alpha = \lambda^\alpha t$ сопряжен относительно гиперквадрики Q характеристике касательной гиперплоскости к (A) соответствующей этому направлению.

Т е о р е м а I.I. На гиперповерхности центров (A) существует в общем случае 2^{n-1} аффинно-главных направлений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристика касательной гиперплоскости к (A) вдоль (I.17) определяется уравнениями

$$x^n - c_i x^i = 0,\ c_{ij} x^i = 0.$$

Из определения 1 следует, что она должна совпадать с (n-2)-мерной плоскостью

$$a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha x^\beta = 0\ ,$$

сопряженной диаметру $x^\alpha = \lambda^\alpha t$ относительно Q. Условия совпадения этих (n-2)-мерных плоскостей приводят к системе n-2 квадратичных уравнений относительно λ^i, определяющей в общем случае 2^{n-1} аффинно-главных направления на гиперповерхности центров, которые удобно использовать для построения канонического репера конгруэнции центральных квадрик в A_3.

§2. Конгруэнции эллипсоидов в A_3 с фокальной конгруэнцией эллипсов

Определение 2. Конгруэнцией V_2^o называется конгруэнция эллипсоидов в A_3, обладающая следующими свойствами: 1/ каждый эллипсоид $Q \in V_2^o$ содержит в качестве фокального многообразия эллипс C с центром в центре эллипсоида Q; 2/ плоскости эллипсов C образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка M плоскости эллипса не совпадает с центром квадрики Q.

Теорема 2.1. Конгруэнции V_2^o существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию V_2^o к каноническому реперу $R=\{A;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где A - центр эллипсоида, вектор $\bar{e}_1$ направлен по прямой AM, вектор $\bar{e}_2$ расположен в плоскости коники C и сопряжен относительно C вектору $\bar{e}_1$, а вектор $\bar{e}_3$ направлен по диаметру эллипсоида Q, сопряженному плоскости коники C, причем концы векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha=1,2,3)$ расположены на эллипсоиде Q. Уравнения эллипсоида Q и эллипса C запишутся, соответственно, в виде

$$F \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0, \qquad (2.1)$$

$$f \equiv (x^1)^2+(x^2)^2-1=0, \; x^3=0. \qquad (2.2)$$

Так как каждая точка эллипса C является фокальной точкой эллипсоида Q, то

$$dF\big|_{x^3=0}=\mu f.$$

В силу (2.3) система Пфаффовых уравнений конгруэнции приводится к виду:

$$\omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega_3^1=0,\ \omega_3^2=0,\ \omega_1^1=0,\ \omega_2^2=0,$$
$$\omega_1^2+\omega_2^1=0,\ \omega^3+\lambda\omega_1=0,\ \omega_1^2=a^k\omega_k,\ \omega_3^3=b^k\omega_k, \qquad (2.4)$$

где

$$\omega_i=\omega_i^3.$$

Анализируя систему (2.4), убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 2.2. Конгруэнции V_2^o обладают следующими свойствами: 1/ центры всех эллипсоидов располагаются на одной прямой (линии центров); 2/ все эллипсоиды конгруэнции V_2^o касаются цилиндра $f=0$ вдоль коники C.

Доказательство. 1/ Имеем: $d\bar{A}=\omega^3\bar{e}_3,\ d\bar{e}_3=\omega_3^3\bar{e}_3$, 2/ $df=-2\omega_3^3 f$. Следовательно, цилиндр $f=0$ - инвариантный. Сравнивая уравнения $f=0$ и $F=0$, видим, что эллипсоид Q касается цилиндра $f=0$ вдоль коники C.

Теорема 2.3. Конгруэнция эллипсоидов допускает следующее безынтегральное представление: возьмем произвольную гладкую поверхность (M) (одна функция двух аргументов) и эллиптический цилиндр H (6 параметров). Пусть C - эллипс, являющийся сечением цилиндра H касательной плоскостью к поверхности (M) в точке M. Зададим для каждой коники эллипсоид Q, касающийся цилиндра H вдоль эллипса (одна функция двух аргументов). Тогда конгруэнция (Q) эллипсоидов есть конгруэнция V_2^o.

Доказательство. Отнесем конгруэнцию (Q) к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, где A - центр эллипса C, $\bar{e}_1$ направлен по прямой AM, $\bar{e}_3$ - по оси цилиндра H, а $\bar{e}_2$ расположен в плоскости коники C и сопряжен вектору $\vec{e}_1$ относительно C. Тогда уравнение цилиндра H запишется в виде $f=0$. Условие инвариантности цилиндра H: $df=\mu f$ приводит к системе пфаффовых уравнений (2.4), определяющей конгруэнцию V_2^o.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве. – Тр. геом.

семинара.ВИНИТИ",М.,1973,5,319-334.

2. М а л а х о в с к и й В.С.,М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр.геометрич.семинара",М., ВИНИТИ,1974,6,II3-I33.

3.Л а п т е в Г.Ф.Распределение касательных элементов."Тр.геом.семинара",М.,ВИНИТИ,1971,3,29-48.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

А.В.С т о л я р о в

О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ КАРТАНА

Работа посвящена изучению некоторых вопросов геометрии поверхности Картана $V_m \subset P_{2m}$. Исследования проводятся методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [6]; все построения ведутся в инвариантной аналитической форме в минимально канонизированном репере 2-го порядка (в репере, отнесенном к линиям сопряженной сети); исключение составляет п.5, где порядок репера выше второго.

На протяжении всего изложения индексы будут принимать следующие значения:

$$i, j, k, s, t, \ell = 1, 2, \dots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1, \dots, 2m;$$
$$\mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, \dots, 2m.$$

I. Рассмотрим m-мерную поверхность V_m ($m \geqslant 2$), погруженную в проективное пространство P_{2m} размерности $2m$. В репере первого порядка $\{A_{\mathcal{J}}\}$ дифференциальные уравнения поверхности $V_m \subset P_{2m}$ имеют вид $\omega_0^\alpha = 0$; продолжая эти уравнения, имеем $\omega_i^\alpha = b_{ik}^\alpha \omega_0^k$, $b_{[ik]}^\alpha = 0$. Последовательные продолжения уравнений последней системы приведут к системе дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных объектов [6] поверхности: $b_{ij}^\alpha, b_{ijk}^\alpha, b_{ijks}^\alpha, \dots$; в