УДК 514.76

Л.В. Исаева
(Калининградский государственный университет)

ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ НОРМАЛИЗАЦИЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрен пример проективной группы приведенный в статье Ведерникова, посвященной распространению метода нормализации Нордена на случай расслоенного пространства [1]. Проективная группа представлена нами как расслоение центропроективных реперов. Методом Лаптева показано, что нормализация проективного пространства индуцирует центропроективную связность в этом расслоении. Доказано, что адаптация подвижного репера проективного пространства полю нормализующих гиперплоскостей сужает расслоение центропроективных реперов до расслоения линейных реперов со связностью.

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n как n-мерное многообразие точек A, т.е. многообразие Грассмана Gr(0,n). Отнесем P_n к подвижному реперу $R=\{A,A_I\}$ $(I,J,K,\ldots=\overline{1,n})$, который является репером нулевого порядка многообразия Gr(0,n). Деривационные формулы вершин репера имеют вид

$$dA=\theta A+\omega^I A_I\,,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A\,. \tag{1}$$

Структурные уравнения проективной группы получаются внешним дифференцированием формул (1) и имеют вид

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I\,, \tag{2}$$

$$D\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+\omega^K\wedge\omega_{JK}^I\,, \tag{3}$$

$$D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J\,, \tag{4}$$

где $\omega_{JK}^I=-\delta_J^I\omega_K-\delta_K^I\omega_J$. Дифференциальные уравнения на вспомогательные формы имеют вид $D\theta=\omega^I\wedge\omega_I$.

Будем считать формы ω^I – базисными, а ω_I^J, ω_J – слоевыми, т.е. представим проективную группу GP(n) как главное расслоение центропроективных реперов G(P_n), где G – подгруппа стационарности точки A.

Исследуем связность в расслоении G(P_n) со структурными уравнениями (2 – 4). Согласно способу Лаптева задания групповой связности рассмотрим преобразования слоевых форм с помощью базисных

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K , \ \tilde{\omega}_I = \omega_I - \Gamma_{IJ} \omega^J , \tag{5}$$

где $\Gamma_{JK}^I , \Gamma_{IJ}$ – некоторые функции. Внешние дифференциалы форм (5) имеют вид

$$D\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + \omega^K \wedge (\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I) - \Gamma_{JK}^P \Gamma_{PL}^I \omega^K \wedge \omega^L ,$$

$$D\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_I^J \wedge \tilde{\omega}_J + \omega^J \wedge (\Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K) - \Gamma_{IJ}^L \Gamma_{LK} \omega^J \wedge \omega^K ,$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_{JK}^I = d\Gamma_{JK}^I - \Gamma_{JL}^I \omega_K^L - \Gamma_{LK}^I \omega_J^L + \Gamma_{JK}^L \omega_L^I .$$

По теореме Картана-Лаптева [2] формы (5) задают связность лишь тогда, когда их внешние дифференциалы есть сумма внешних произведений этих же форм и внешних произведений базисных форм. Поэтому нужно задать поле объекта связности $\Gamma = \{ \Gamma_{JK}^I , \Gamma_{IJ} \}$ со следующими дифференциальными уравнениями компонент:

$$\Delta\Gamma_{JK}^I + \omega_{JK}^I = \Gamma_{JKL}^I \omega^L , \ \Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K = \Gamma_{IJK} \omega^K . \tag{6}$$

Объект центропроективной связности Γ содержит подобъект Γ_{JK}^I линейной связности. Таким образом, внешние дифференциалы форм (5) имеют вид

$$D\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L , D\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_I^J \wedge \tilde{\omega}_J + R_{IJK} \omega^J \wedge \omega^K ,$$

причем компоненты объекта кривизны $R = \{ R_{JKL}^I , R_{IJK} \}$ связности Γ выражаются по следующим формулам:

$$R_{JKL}^I = \Gamma_{J[KL]}^I - \Gamma_{J[K}^P \Gamma_{PL]}^I , \ R_{IJK} = \Gamma_{I[JK]} - \Gamma_{I[J}^L \Gamma_{LK]} .$$

Соответственно объекту центропроективной связности Γ объект R называется объектом центропроективной кривизны. Дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R имеют вид

$$\Delta R_{JKL}^I \equiv 0 , \ \Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L \omega_L \equiv 0 .$$

Теорема 1. *Объект центропроективной кривизны* $R = \{ R^I_{JKL}$, $R_{IJK} \}$ *является тензором, содержащим подтензор* R^I_{JKL}.

Произведем нормализацию [3] проективного пространства P_n, точнее его области, описанной точкой A. Зададим гиперплоскость P_{n-1}, не проходящую через точку A, совокупностью точек

$$B_I = A_I + \lambda_I A. \qquad (7)$$

Дифференциальные уравнения на коэффициенты λ_I, обеспечивающие инвариантность гиперплоскости P_{n-1} при фиксации точки A, имеют вид

$$\Delta\lambda_I + \omega_I = \lambda_{IJ}\,\omega^I. \qquad (8)$$

Используя уравнения (6) и (8), построим охваты объекта связности Γ с помощью оснащающего квазитензора λ_I:

$$\Gamma^I_{JK} = -\delta^I_J \lambda_K - \delta^I_K \lambda_J, \quad \Gamma_{IJ} = -\lambda_I \lambda_J.$$

Теорема 2. *Оснащение многообразия Gr(0,n) точек A проективного пространства* P_n *полем гиперплоскостей* P_{n-1} $(A \notin P_{n-1})$ *индуцирует центропроективную связность* Γ *в расслоении центропроективных реперов* $G(P_n)$.

Произведем дополнительную канонизацию репера, поместив вершины A_I на гиперплоскость P_{n-1}, натянутую на точки B_I, определяемые равенствами (7). Тогда $\lambda_I = 0$. В этом случае из уравнений (8) следует

$$\omega_I = \lambda_{IJ}\,\omega^J. \qquad (9)$$

Это уравнение нормализованной области проективного пространства P_n, дифференцируя которое, получаем

$$\Delta\lambda_{IJ} = \lambda_{IJK}\,\omega^K \ \ (\lambda_{I[JK]} = 0). \qquad (10)$$

Структурные уравнения (3) для слоевых форм расслоения линейных реперов принимают вид

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + R^I_{JKL}\,\omega^K \wedge \omega^L,$$

где

$$R^I_{JKL} = -\delta^I_J \lambda_{[KL]} - \delta^I_{[K} \lambda_{JL]}.$$

В силу уравнений (10) $\Delta R^I_{JKL} \equiv 0$, т.е. объект линейной связности R^I_{JKL} является тензором, что было доказано в общем случае. Таким образом, линейная связность является внутренней в данном расслоении, ассоциированном с нормализованным проективным пространством. Эту связность А.П. Норден назвал внутренней связностью нормализованного пространства [3].

Теорема 3. *При адаптации подвижного репера нулевого порядка пространства P_n, точнее многообразия Грассмана $Gr(0,n)$, полю оснащающих гиперплоскостей P_{n-1} ($A\notin P_{n-1}$) расслоение центропроективных реперов $G(P_n)$ сужается до расслоения линейных реперов $L_{n^2}(P_n)$ со связностью, т.е. до пространства линейной связности $L_{n^2,n}$.*

Можно сказать иначе.

Теорема 4. *В проективном пространстве P_n с распределением гиперплоскостей 2-го рода [4], т.е. с n-мерным семейством пар (A,P_{n-1}), где точка $A\notin P_{n-1}$, ассоциируется пространство линейной связности $L_{n^2,n}$.*

Вывод. С одной стороны, проективная группа GP(n) со структурными уравнениями (2 – 4) не является расслоением со связностью, иначе говоря, пространством групповой связности. С другой стороны, она является пространством классической проективной связности Картана [2]. В статье Ведерникова [1] пример проективной группы отличается от других примеров, так как с точки зрения расслоений проективная группа не является пространством со связностью. Если же проективное пространство нормализовано, то в проективной группе, рассматриваемой как расслоение центропроективных реперов, индуцируется центропроективная связность. Наконец, адаптация подвижного репера полю нормализующих гиперплоскостей сужает расслоение центропроективных реперов до пространства линейной связности.

Список литературы

1. *Ведерников В.И.* Обобщение метода нормализации А.П. Нордена на случай расслоенного пространства // Геометрия обобщенных пространств: Ученые записки / Казанский ун-т, Казань, 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 3 – 23.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С. 5 – 247.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М. 1976.

4. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С. 41 – 120.

L. Isaeva

CENTERPROJECTIVE AND LINEAR CONNECTIONS, INDUCED BY NORMALIZATION OF PROJECTIVE SPACE

The example of a projective group reduced in the article by Vedernikov is reviewed, dedicated to distribution of a method of normalization by Norden on a case of a bundle space [1]. The projective group is shown by us as bundle of centerprojective reference marks. A method by Laptev is rotined, that the normalization of projective space induces centerprojective connection in this bundle. It is demonstrated, that the adoptation of a mobile reference mark of projective space to a field of normalizing hyperplanes narrows down bundle of centerprojective reference marks up to bundle of linear reference marks with connection

УДК 514.76

В.И. Макеев
(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ $g_{3,y}$ ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССОВ

Изучаются инфинитезимальные относительные изометрии веса *w* трехмерных общих метрических пространств $g_{3,y}$ векторных элементов с относительной метрикой. Получены алгебры Ли $L_r, r \geq 5$ инфинитезимальных относительных изометрий пространств $g_{3,y}$ и сами эти пространства, допускающие разрешимые пятимерные группы относительных изометрий определенных структур.

Пусть M – гладкое n-мерное многообразие и $T(M)$ – его касательное расслоение. Под общим метрическим пространством $g_{n,y}$ векторных элементов с относительной метрикой понимается пара $(M, g(x,y))$, где $y \in T_x(M)$, а $g(x,y)$ – невырожденное симметриче-