ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

Е.Т. И в л е в

О ТАНГЕНЦИАЛЬНО-ВЫРОЖДЕННЫХ РАССЛОЕНИЯХ $P_{m,n}$

В статье изучаются некоторые проективно инвариантные классы расслоений $P_{m,n}$, которые являются аналогом тангенциально-вырожденных поверхностей в проективном пространстве, изученных М.А.Акивисом в [1] и [2].

1.Рассмотрим пространство $P_{m,n}$ проективной связности C с точечным образующим элементом A, которое представляет собой $(m+n)$-мерное расслоенное пространство с m-мерной базой $\mathfrak{M}_m$ и n-мерными проективными слоями P_n с заданным сечением: каждой точке $(u)\in\mathfrak{M}_m$ в слое P_n отвечает точка $A(u)$. Предполагается, что слой $P_n(u)$ отнесен к проективному реперу $T=\{A_{\mathcal{I}}(u)\}$ $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L}=0,1,2,..,n)$, причем $A=A_0$. С помощью связности C слой $P_n(u+du)$ отображается на исходный при помощи следующего отображения реперов: $A_{\mathcal{K}}(u+du)\longrightarrow A_{\mathcal{K}}(u,du)\doteq A_{\mathcal{K}}(u)+\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}A_{\mathcal{J}}(u)$. Здесь формы $\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}=\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}}\wedge\omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{J}}+R_{\mathcal{K}\alpha\beta}^{\mathcal{J}}\omega_0^{\alpha}\wedge\omega_0^{\beta},\quad R_{\mathcal{K}(\alpha\beta)}^{\mathcal{J}}=0, \qquad (1)$$
$$(\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\mu=1,2,\dots,m),\quad \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}=0,$$

причем компоненты $R_{\mathcal{K}\alpha\beta}^{\mathcal{J}}$ тензора кручения-кривизны связности C удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla R_{\mathcal{K}\alpha\beta}^{\mathcal{J}}+2R_{\mathcal{K}\alpha\beta}^{\mathcal{J}}\omega_0^0=R_{\mathcal{K}\alpha\beta\gamma}^{\mathcal{J}}\omega_0^{\gamma},\quad R_{\mathcal{K}(\alpha\beta)\gamma}^{\mathcal{J}}=0. \qquad (2)$$

Репер T в слое P_n точки A_0 секущей m-поверхности $\mathfrak{M}_m$ расслоения $P_{m,n}$ выбирается так, чтобы m-плоскость

$$L_m=(A_0A_1\dots A_m) \qquad (3)$$

была касательной к $\mathfrak{M}_m$ в точке A_0 в смысле [3,с.8]. Тогда дифференциальные уравнения секущей m-поверхности $\mathfrak{M}_m$ запишутся в виде:

$$\omega_0^{\hat{\alpha}}=0 \qquad (4)$$

(см.(7) в [3]). Продолжения дифференциальных уравнений (4) с использованием (1) приводят к дифференциальным уравнениям

$$\omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\omega_0^{\beta},\quad A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}=\Lambda_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}+R_{0\beta\alpha}^{\hat{\alpha}},\quad \Lambda_{[\beta\alpha]}^{\hat{\alpha}}=0. \qquad (5)$$

3. Каждой двухмерной плоскости L_2 слоя P_n точки A_0 $(A_0\in L_2\subset L_m)$, определяемой в локальных слоевых координатах уравнениями L_2: $x^{\hat{p}}=B_p^{\hat{p}}x^p$, $(p,q=1,2;\ \hat{p},\hat{q}=3,\dots,m)$, отвечает проективитет $\overset{*}{R}(L_2)$ слоя P_n в себя:

$$\overset{*}{R}(L_2)=\{\overset{*}{R}_{\mathcal{J}}\},\quad \overset{*}{R}{}_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}=R_{\mathcal{J}[1|\hat{p}|}^{\mathcal{K}}B_{2]}^{\hat{p}}+R_{\mathcal{J}12}^{\mathcal{K}}+R_{\mathcal{J}\hat{p}\hat{q}}^{\mathcal{K}}B_1^{\hat{p}}B_2^{\hat{q}} \qquad (6)$$

Этот проективитет точку $M(u)\in P_n(u)$, отвечающую точке $A_0(u)\in\mathfrak{M}_m$, переводит в точку $\overset{*}{M}(u)\in P_n$ следующим образом. Обозначим $M_p=M(u+d_pu)\in P_n(u+d_pu)$ -образ точки $M(u)$ в направлении $d_p\in L_2$; $M_{pq}=M(u+d_pu+d_qu)\in P_n(u+d_pu+d_qu)$ $(p\neq q)$ -образ точки M_p в направлении d_q; $\overset{*}{M}_p(u,d_pu)\in P_n(u)$ -образ точки M_p при отображении слоя $P_n(u+d_pu)$ на исходный слой $P_n(u)$ в направлении d_p; $\overset{*}{M}_{pq}(u,d_pu,d_qu)\in P_n(u)$ -образ точки M_{pq} при отображении слоя $P_n(u+d_pu+d_qu)$ на $P_n(u)$ вдоль пути $\{A_0(u+d_pu+d_qu)A_0(u+d_pu)A_0(u)\}$ базы $\mathfrak{M}_m$. Заметим, что в общем случае $M_{12}\neq M_{21}$. Оказывается, что точка $\overset{*}{M}(u)\in M_{12}M_{21}$ независимо от выбора направлений d_1 и d_2 в плоскости L_2.

Легко видеть, что плоскость L_2 можно определить заданием двух линейно-независимых направлений $\bar{u}=(A_0A_\alpha)\bar{u}^{\alpha}$, $\bar{v}=(A_0A_\beta)\bar{v}^{\beta}$, принадлежащих L_2 тогда и только тогда, когда

$$\bar{u}^{\hat{p}}=B_p^{\hat{p}}\bar{u}^p,\quad \bar{v}^{\hat{p}}=B_p^{\hat{p}}\bar{v}^p,\quad \bar{u}^1\bar{v}^2-\bar{v}^1\bar{u}^2\neq 0. \qquad (7)$$

Поэтому в дальнейшем проективитет $\overset{*}{R}$ будем обозначать

$$\overset{*}{R}(\bar{u},\bar{v})=\{R_{\mathcal{J}\alpha\beta}^{\mathcal{K}}u^{\alpha}v^{\beta}\} \qquad (8)$$

и называть проективитетом, отвечающим паре линейно-независимых направлений $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

3. Как и в [3] (см.§3), каждой гиперплоскости в слое P_n точки A_0, проходящей через L_m и определяемой уравнением

$$x_{\hat{\alpha}}x^{\hat{\alpha}}=0, \qquad (9)$$

в m-плоскости L_m отвечают: 1) конус K_2^{m-1} второго порядка с вершиной A_0:

$$x_{\hat\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0,\ x^{\hat\alpha}=0; \qquad (10)$$

2) линейный комплекс Q_2:

$$x_{\hat\alpha}R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}x^\alpha t^\beta=0,\ x^{\hat\alpha}=0,\ t^{\hat\beta}=0; \qquad (11)$$

3) $(m-1)$-плоскость $G_{m-1}\ni A_0$:

$$x^\alpha x_{\hat\alpha}A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}t^\beta=0,\ t^{\hat\beta}=0, \qquad (12)$$

соответствующая направлению $x=x^\alpha(A_0A_\alpha)\in\mathcal{L}_m$ (см.[3]), (28), с.14). Все гиперплоскости (9), которым в $\mathcal{L}_m$ отвечают неопределенные $(m-1)$-плоскости (12) независимо от направления $x\in\mathcal{L}_m$, определяются уравнениями

$$x_{\hat\alpha}A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=0 \qquad (13)$$

и пересекаются по $m_1^{(1)}$-плоскости $\mathcal{L}_{m_1^{(1)}}$, где $m_1^{(1)}=m^2+m$. Обозначим $\mathcal{L}_{m_1^{(2)}}$ ($\mathcal{L}_{m_1^{(3)}}$) -линейное подпространство в слое P_n точки A_0 -пересечение всех гиперплоскостей (9), которым в $\mathcal{L}_m$ отвечают неопределенные $K_2^{m-1}(Q_2)$. Из (10) и (11) следует, что $\mathcal{L}_{m_1^{(2)}}$ и $\mathcal{L}_{m_1^{(3)}}$ определяются уравнениями

$$\mathcal{L}_{m_1^{(2)}}:\ x_{\hat\alpha}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}=0;\quad \mathcal{L}_{m_1^{(3)}}:\ x_{\hat\alpha}R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}=0, \qquad (14)$$

откуда замечаем, что размерности этих линейных подпространств суть $m_1^{(2)}=\frac{m(m+3)}{2}$, $m_1^{(3)}=\frac{m(m+1)}{2}$. Из (13) и (14) следует, что $\mathcal{L}_{m_1^{(1)}}=\mathcal{L}_{m_1^{(2)}}\cup\mathcal{L}_{m_1^{(3)}}$

4. Расслоением $P^{2b}_{m,n}$ -тангенциально-вырожденным расслоением ранга b и второго рода-называется такое расслоение $P_{m,n}$, у которого все конусы $K_2^{m-1}\subset\mathcal{L}_m$ в слое P_n точки $A_0\in\mathfrak{M}_m$, соответствующие всем гиперплоскостям этого слоя, проходящим через $\mathcal{L}_m$, но не содержащим $\mathcal{L}_{m_1^{(2)}}$ при $n>m_1^{(2)}$, имеют одну и ту же (ассоциированную) $(m-b)$-мерную плоскую вершину $\Gamma^2_{m-b}\subset\mathcal{L}_m$ $(0\le b<m)$. Из (10) следует, что в случае расслоения $P^{2b}_{m,n}$ и только в этом случае $\mathrm{Rang}\,[\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}]=b$ при любых $\hat\alpha$. Проведем в слое P_n точки $A_0\in\mathfrak{M}_m$ расслоения $P^{2b}_{m,n}$ такую канонизацию проективного репера, при которой

$$\Gamma^2_{m-b}=(A_0A_{b+1}\cdots A_m), \qquad (15)$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat u}=0\Leftrightarrow\Lambda^{\hat\alpha}_{u\hat u}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\hat u u}=0,\ \Lambda^{\hat\alpha}_{\hat u\hat v}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\hat v\hat u}=0,\ \left(\begin{matrix}u,v=1,2,\dots,b;\\ \hat u,\hat v=b+1,\dots,m\end{matrix}\right).$$

которые с учетом (5) приводятся к соотношениям

$$A^{\hat\alpha}_{uv}=\Lambda^{\hat\alpha}_{uv}+R^{\hat\alpha}_{0vu},\quad A^{\hat\alpha}_{\alpha\hat u}=-R^{\hat\alpha}_{0\alpha\hat u}. \qquad (16)$$

5. Расслоением $P^{3c}_{m,n}$ -тангенциально-вырожденным расслоением ранга c и третьего рода - называется такое расслоение $P_{m,n}$, у которого $(m-1)$-плоскости в $\mathcal{L}_m$, отвечающие всякому направлению $x\in\mathcal{L}_m$ в нуль-системе линейного комплекса Q_2, соответствующего любой гиперплоскости в слое P_n точки A_0, проходящей через $\mathcal{L}_m$, но не содержащей $\mathcal{L}_{m_1^{(3)}}$ при $n>m_1^{(3)}$, проходят через одну и ту же (ассоциированную) $(m-c)$-плоскость Γ^3_{m-c} $(0\le c<m)$. Из (11) следует, что в случае расслоения $P^{3c}_{m,n}$ и только в этом случае $\mathrm{Rang}\,[R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}]=c$ (c-четное) при любых $\hat\alpha$. Проведем в слое P_n точки $A_0\in\mathfrak{M}_m$ расслоения $P^{3c}_{m,n}$ такую канонизацию репера, при которой

$$\Gamma^3_{m-c}=(A_0A_{c+1}A_{c+2}\cdots A_m), \qquad (17)$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$R^{\hat\alpha}_{0\alpha\hat u}=0\Leftrightarrow R^{\hat\alpha}_{0u\hat u}=-R^{\hat\alpha}_{0\hat u u}=0,\ R^{\hat\alpha}_{0\hat u\hat v}=-R^{\hat\alpha}_{0\hat v\hat u}=0, \qquad (18)$$

$(u,v=1,2,\dots,c;\ \hat u,\hat v=c+1,\dots,m)$, которые с учетом (5) приводят к соотношениям

$$A^{\hat\alpha}_{uv}=\Lambda^{\hat\alpha}_{uv}+R^{\hat\alpha}_{0vu},\ A^{\hat\alpha}_{\alpha\hat u}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\hat u}=\Lambda^{\hat\alpha}_{\hat u\alpha}. \qquad (19)$$

Из (18) и (8) вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Расслоение $P^{3c}_{m,n}$ характеризуется тем, что в m-плоскости $\mathcal{L}_m$ слоя P_n точки A_0 существует такая $(m-c)$-плоскость $\Gamma^3_{m-c}\ni A_0$, что образы точки A_0 слоя P_n при проективитетах $\mathcal{R}(u,v)$, соответствующих любой паре направлений u и v из Γ^3_{m-c}, не выходят из $\mathcal{L}_m$.

6. Расслоением $P^{1a}_{m,n}$-тангенциально-вырожденным расслоением ранга a и первого рода - называется такое расслоение $P_{m,n}$, у которого $(m-1)$-плоскости $G_{m-1}\subset\mathcal{L}_m$ в каждом слое P_n точки A_0, отвечающие каждому направлению $x\in\mathcal{L}_m$

и соответствующие любой гиперплоскости в этом слое, проходящей через L_m, но не содержащей $L_{m_1^{(1)}}$ при $n > m_1^{(1)}$, проходят через одну и ту же (ассоциированную) $(m-a)$-плоскость Γ^1_{m-a}. Из (12) следует, что в случае расслоения $P^{1a}_{m,n}$ и только в этом случае $Rang\,[A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta}] = a$ при любых $\hat{\alpha}$. Проведем в слое P_n точки $A_0 \in \mathcal{M}_m$ расслоения $P^{1a}_{m,n}$ такую канонизацию репера T, при которой

$$\Gamma^1_{m-a} = (A_0 A_{a+1} \cdots A_m), \qquad (20)$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$A^{\hat{u}}_{\alpha\hat{v}} = 0, \ (u,v,w = 1,2,\dots,a;\ \hat{u},\hat{v},\hat{w} = a+1,\dots,m). \quad (21)$$

Эти соотношения с учетом (5) приводят к соотношениям

$$A^{\hat{u}}_{uv} = \Lambda^{\hat{u}}_{uv} + R^{\hat{u}}_{ovu}, \qquad (22)$$

$$\omega^{\hat{u}}_{o} = 0,\ \omega^{\hat{u}}_{u} = A^{\hat{u}}_{uv}\omega^{v}_{o},\ \omega^{\hat{v}}_{\hat{u}} = 0,\ \omega^{v}_{\hat{u}} = A^{v}_{\hat{u}w}\omega^{w}_{o},$$

причем

$$R^{\hat{u}}_{u\hat{u}w} + R^{u}_{o\hat{w}\hat{v}}A^{\hat{u}}_{vu} = 0,\ R^{\hat{u}}_{o\alpha\hat{u}} = A^{\hat{u}}_{uv}R^{v}_{o\alpha\hat{u}}, \qquad (23)$$

$$A^{u}_{\hat{u}[v}A^{\hat{u}}_{|u|w]} + 2R^{\hat{u}}_{\hat{u}vw} = 0,\ R^{v}_{\hat{u}\alpha\hat{w}} = A^{v}_{\hat{u}u}R^{u}_{o\alpha\hat{w}}.$$

Из (15)-(23) с учетом (I) и (8) вытекают следующие теоремы о геометрических свойствах расслоения $P^{1a}_{m,n}$.

Т е о р е м а 2. Расслоение $P_{m,n}$ будет расслоением $P^{1a}_{m,n}$ тогда и только тогда, когда оно будет одновременно расслоениями $P^{2a}_{m,n}$ и $P^{3a}_{m,n}$ с одним и тем же полем ассоциированных $(m-a)$-плоскостей, принадлежащих соответствующим m-плоскостям L_m.

Т е о р е м а 3. Расслоение $P_{m,n}$ будет расслоением $P^{1a}_{m,n}$ тогда и только тогда, когда в m-плоскости L_m слоя P_n точки $A_0 \in \mathcal{M}_m$ существует такая $(m-a)$-плоскость $\Gamma^1_{m-a} \ni A_0$, в направлениях которой m-плоскость L_m рекурентно переносится в связности C.

Т е о р е м а 4. Образы $(m-a)$-плоскости Γ^1_{m-a} в слое P_n точки $A_0 \in \mathcal{M}_m$ расслоения $P^{1a}_{m,n}$ при проективитетах $\mathring{R}(u,v)$, $\forall u \in \Gamma^1_{m-a}, \forall v \in \Gamma^1_{m-a}$ принадлежат m-плоскости L_m.

Т е о р е м а 5. Каково бы ни было поле линейных подпространств L^* в соответствующих слоях P_n точек $A_0 \in \mathcal{M}$ расслоения $P^{1a}_{m,n}$: $L^*_m \cup L_m = P_n$, оно индуцирует вдоль направлений из Γ^1_{m-a} одну и ту же перспективную связность Π в смысле Ю.Г.Лумисте [4] с формами связности $\omega^o_o, \omega^{\hat{u}}_o, \omega^o_{\hat{u}}, \omega^{\hat{v}}_{\hat{u}}$ и с компонентами тензора кручения-кривизны $R^o_{o\hat{u}\hat{v}}$, $R^{\hat{u}}_{o\hat{v}\hat{w}}$, $R^o_{\hat{u}\hat{v}\hat{w}}$ и $R^{\hat{v}}_{\hat{u}\hat{w}\hat{p}}$ $(\hat{u},\hat{v},\hat{p},\hat{w} = a+1,\dots,m)$.

З а м е ч а н и е. В случае, когда $P_{m,n}$ однородно $(R^{x}_{J\alpha\beta} = 0)$, т.е. когда m-поверхность $\mathcal{M}_m$ вложена в проективное пространство P_n, расслоение $P^{3a}_{m,n}$ не определено, а расслоения $P^{1a}_{m,n}$ и $P^{2a}_{m,n}$, совпадающие друг с другом, сводятся к тангенциально-вырожденной m-поверхности $\mathcal{M}_m$ ранга a в смысле М.А.Акивиса [1],[2].

Список литературы

I. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей рангов // Изв.вузов.Математика, 1957, № I, с.9-19.

2. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия Калинин, 1977.

3. Ивлев Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1974, Вып.4, с.6-28.

4. Лумисте Ю.Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения.-Тр.геометрич.семинара, ВИНИТИ, I, 1966, с.191-237.