УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

О почти контактных метрических структурах на 0- и 1-гиперповерхностях почти келеровых многообразий

Получены структурные уравнения почти контактной метрической структуры на гиперповерхности почти келерова многообразия. Выдвинуто предположение о том, что в почти келеровом многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, 1-гиперповерхность, вполне геодезическая гиперповерхность, келерово многообразие, почти келерово многообразие.

1. Известно, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались многие геометры: Д. Блэр (США), С. Ишихара, М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, К. Яно (Япония), В. Ф. Кириченко, Л. В. Степанова (Россия).

В [1] автором было установлено, что в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры октав почти контактная метрическая структура на гиперповерхности с типовым числом 1 (или 1-гиперповерхности) является косимплектической. То есть такой же, как и на вполне геодезической гиперповерхности (или 0-гиперповерхности) в 6-мерном келеровом подмногообразии алгебры Кэли. Потом этот результат был обобщен для почти контактных метрических гиперповерхностей произвольного келерова многообразия [2].

Для 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой (такая структура не интегрируема, и, следовательно, не является келеровой или эрмитовой) получены схожие результаты. Именно, доказано, что и на вполне геодезической гиперповерхности, и на гиперповерхности с типовым числом 1 возможна реализация почти контактной метрической структуры только одного вида — слабо косимплектической структуры (иногда ее называют структурой Эндо) [3; 4]. Этот результат также был обобщен для почти контактных метрических гиперповерхностей произвольного приближенно келерова многообразия [5].

Класс почти келеровых многообразий, как и классы келеровых и приближенно келеровых многообразий, тоже относят к так называемым малым классам Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. В данной заметке будет рассмотрен вопрос о виде почти контактной метрической структуры на 0- и 1-гиперповерхностях почти келеровых многообразий.

2. Как известно [6], почти эрмитовой (almost Hermitian, *AH*-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (то есть 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,Y)=\langle X, JY\rangle, \quad X,Y\in\aleph(M^{2n})$$

и называемого фундаментальной формой структуры.

Пусть $\left(M^{2n}, \{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}\right)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p\in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или А-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, отвечающие собственному значению оператора $i=\sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a}=a+n$.

Почти эрмитова структура принадлежит классу почти келеровых структур (или классу W_2, если пользоваться терминологией Грея — Херреллы), если выполняется условие $dF=0$.

Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются условия [6]:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X, \Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Классическим примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура [6]. Она характеризуется такими тождествами

$$\nabla \eta = 0, \quad \nabla \Phi = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g. Многообразия, наделенные косимплектической структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [6]. Другими важнейшими примерами почти контактной метрической структуры являются сасакиева структура и структура Кенмоцу. Многообразия, оснащенные такими структурами, — объекты исследования десятков статей, публикуемых ежегодно в ведущих математических журналах.

3. Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры, естественно индуцированной на гиперповерхности N^{2n-1} почти эрмитова многообразия, имеет следующий вид [7; 8]:

$$d\omega^\alpha = \omega_b^\alpha \wedge \omega^b + B^{\alpha b}{}_c\, \omega^c \wedge \omega_b + B^{\alpha bc}\, \omega_b \wedge \omega_c +$$
$$+ (\sqrt{2}\, B^{\alpha n}{}_b + i\sigma_b^\alpha)\, \omega^b \wedge \omega +$$
$$+ (-\sqrt{2}\, \tilde{B}^{n\alpha b} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha b}{}_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha bn} + i\sigma^{\alpha b})\, \omega_b \wedge \omega \;;$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^b \wedge \omega_b + B_{\alpha b}{}^c\, \omega_c \wedge \omega^b + B_{\alpha bc}\, \omega^b \wedge \omega^c +$$
$$+ (\sqrt{2}\, B_{\alpha n}{}^b - i\sigma_\alpha^b)\, \omega_b \wedge \omega +$$
$$+ (-\sqrt{2}\, \tilde{B}_{n\alpha b} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{\alpha bn} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha b}{}^n - i\sigma_{\alpha b})\, \omega^b \wedge \omega \;;$$

$$d\omega = \sqrt{2}\, B_{nab}\, \omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{2}\, B^{nab}\, \omega_a \wedge \omega_b +$$
$$+ \left(\sqrt{2}\, B^{na}{}_b - \sqrt{2}\, B_{nb}{}^a - 2i\sigma_b^a\right) \omega^b \wedge \omega_a +$$
$$+ \left(\tilde{B}_{nbn} + B_{nb}{}^n + i\sigma_{nb}\right) \omega \wedge \omega^b + \left(\tilde{B}^{nbn} + B^{nb}{}_n - i\sigma_n^b\right) \omega \wedge \omega_b \;.$$

Здесь $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^{n}=\omega)$; $\{\omega^{k}_{j}\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_{\alpha}=\omega^{\hat{\alpha}}$; $j,k=1,...,2n$; $\alpha,\beta,\gamma\ =1,\ \dots,n-1$; $a,b,c=1,\dots,n$. Функции $\left\{B^{abc}\right\}$, $\left\{B_{abc}\right\}$ и $\left\{B^{ab}{}_{c}\right\}$, $\left\{B_{ab}{}^{c}\right\}$ являются компонентами структурных и виртуальных тензоров Кириченко, соответственно [9]; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти эрмитово многообразие M^{2n}.

Принимая во внимание тот факт, что для почти келерова многообразия виртуальные тензоры Кириченко обращаются в нуль [10], мы получаем такие структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} почти келерова многообразия M^{2n}.

$$\begin{gathered}
d\,\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}\ +B^{\alpha\beta\gamma}\,\omega_{\beta}\wedge\omega_{\gamma}+\\
+\ i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta}\wedge\omega+(-\sqrt{2}\,\widetilde{B}^{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}^{\alpha\beta n}+i\sigma^{\alpha\beta})\,\omega_{\beta}\wedge\omega\ ;\\
d\,\omega_{\alpha}=-\,\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}\ +B_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+ \qquad (1)\\
-\,i\sigma^{\beta}_{\alpha}\,\omega_{\beta}\wedge\omega+(-\sqrt{2}\,\widetilde{B}_{n\alpha\beta}-\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{\alpha\beta n}-i\sigma_{\alpha\beta})\,\omega^{\beta}\wedge\omega\ ;\\
d\,\omega=\sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\,\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+\sqrt{2}\,B^{n\alpha\beta}\,\omega_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}-\\
-\,2i\,\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+\left(\widetilde{B}_{n\beta n}+i\sigma_{n\beta}\right)\omega\wedge\omega^{\beta}+\left(\widetilde{B}^{n\beta n}-i\sigma^{\beta}_{n}\right)\omega\wedge\omega_{\beta}\,.
\end{gathered}$$

Структурные уравнения (1) содержат всю информацию о свойствах почти контактной метрической структуры на гиперповерхности почти келерова многообразия. Обратим внимание на то, что если гиперповерхность является вполне геодезической, то есть все компоненты ее второй квадратичной формы σ обращаются в нуль, то уравнения (1) существенно упрощаются:

$$d\,\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} \ + B^{\alpha\beta\gamma}\,\omega_{\beta} \wedge \omega_{\gamma} + (-\sqrt{2}\,\widetilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}^{\alpha\beta n})\,\omega_{\beta} \wedge \omega \ ;$$

$$d\,\omega_{\alpha} = -\,\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} \ + B_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + (-\sqrt{2}\,\widetilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{\alpha\beta n})\,\omega^{\beta} \wedge \omega \ ;$$

$$d\,\omega = \sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + \sqrt{2}\,B^{n\alpha\beta}\,\omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + \qquad (2)$$

$$+\left(\widetilde{B}_{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega^{\beta} + \left(\widetilde{B}^{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega_{\beta} \ .$$

Однако эти уравнения не соответствуют ни косимплектической структуре (в случае, когда почти келерова структура отлична от келеровой), ни структурам Кенмоцу или Сасаки, ни другим видам известных почти контактных метрических структур [8]. Предположение, которое мы выдвигаем в данной заметке, состоит в следующем. Если типовое число гиперповерхности N^{2n-1} почти келерова многообразия M^{2n} равно единице, то есть единице равен ранг ее второй квадратичной формы, то почти контактная метрическая структура на этой гиперповерхности тоже задается уравнениями (2).

Другими словами, мы формулируем такое

Предположение. *В произвольном почти келеровом многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом 0 и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными.*

Разумеется, получение структурных уравнений (1) является только первым (хотя и весьма существенным) шагом к тому, чтобы подтвердить или опровергнуть такое предположение.

4. Напомним, что в начале этой заметки мы указывали: выводы об идентичности почти контактных метрических структур на гиперповерхностях келеровых и приближенно келеровых многообразий сначала были получены для 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Использовались методы, апробированные именно для исследования 6-мерных келеровых и приближенно келеровых многообразий. Этот путь, однако, непригоден для работы в данном случае. Дело в том, что до сей поры не известно ни одного примера собственного 6-мерного почти келерова многообразия. На это обратил внимание еще более 50 лет тому назад выдающийся американский геометр Альфред Грей. И вот уже полвека так называемая проблема Грея о нахождении такого примера (или о доказательстве несуществования 6-мерного собственного почти келерова многообразия) не решена. Наверное, подтвердить или опровергнуть наше предположение будет все-таки гораздо проще.

Список литературы

1. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. №10. С. 13—18.
2. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, №4. С. 719—723.
3. *Abu-Saleem A., Banaru M.B.* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8, №1. P. 35—46.
4. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series 3: Mathematics, Informatics, Physics. 2015. Vol. 8 (57), №2. P. 21—28.
5. *Банару М.Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2014. №3. С. 60—62.
6. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.
7. *Степанова Л.В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина. 1995. С. 187—191.
8. *Кириченко В.Ф., Банару М.Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

9. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* Some applications of Kirichenko tensors // An. Univ. Oradea, Fasc. Mat. 2010. Vol. 17, №2. P. 201—208.

10. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

M. Banaru

On almost contact metric structure on 0- or 1-hypersurface of almost Kählerian manifolds

The Cartan structure equations of the almost contact metric structure induced on a hypersurface of an almost Kählerian manifold are obtained. The following supposition is introduced: the properties of almost contact metric structures on totally geodesic and 1-type hypersurfaces in almost Kählerian manifolds are identical.

Key words: almost contact metric structure, 1-type hypersurfaces, totally geodesic hypersurface, Kählerian manifold, almost Kählerian manifold.

УДК 514.76

М. Б. Банару, Г. А. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли

Получен критерий эйнштейновости уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав.

Ключевые слова*:* алгебра октав, 6-мерное уплощающееся эрмитово подмногообразие, многообразие Эйнштейна.