УДК 514.76

О.А. Монахова

(Пензенский государственный педагогический университет)

РАЗЛОЖЕНИЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАССЛОЕНИЯ $(\mathbf{T_2^0(M_n)}, \nabla^{\mathbf{H}})$

Получено разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования горизонтального лифта линейной связности на расслоении дважды ковариантных тензоров.

1. Лифты тензорных полей на расслоение $T_2^0(M_n)$

Рассмотрим расслоение дважды ковариантных тензоров над гладким класса C^∞ многообразием M_n. Определим отображения, которые в дальнейшем будем называть лифтами, модуля $\Im_s^r(M_n)$ тензорных полей на базе в модуль $\Im_q^p(T_2^0(M_n))$ тензорных полей на расслоении следующим образом.

1. V-лифт функций: $\Im_0^0(M_n) \to \Im_0^0(T_2^0(M_n))$, $f^V = f \circ \pi$, где $\pi : T_2^0(M_n) \to M_n$ – каноническая проекция.

2. γ-лифт: $\Im_0^2(M_n) \to \Im_0^0(T_2^0(M_n))$, $\gamma A = (A^{ij})^V x_{ij}$, где A^{ij} — компоненты тензорного поля A в некоторой карте (U, x^i), $i = \overline{1,n}$ на M_n, а x_{ij} — координатные функции в карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ на расслоении.

3. V-лифт: $\Im_2^0(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$, $B^V = (B_{jk})^V \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$, B_{jk} – компоненты тензорного поля B.

4. Vγ-лифт: $\Im_2^2(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$, $C^{V\gamma} = (C_{jk}^{pq})^V x_{pq} \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$, C_{ij} – компоненты тензорного поля C.

5. Vγ²-лифт: $\Im_2^4(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$,

$D^{V\gamma^2} = (D_{jk}^{lmpq})^V x_{lm} x_{pq} \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$, D_{jk}^{lmpq} – компоненты тензорного поля D.

6. V_1-V_2-лифты: $\Im_1^1(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$, $S^{V_1} = S_j^i x_{ik} \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$, $S^{V_2} = S_j^i x_{ki} \dfrac{\partial}{\partial x_{kj}}$, S_j^i – компоненты тензорного поля S.

Пусть на базе M_n в карте (U, x^i) задана линейная связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с компонентами Γ_{jk}^i и связность ∇ с компонентами $\Im_{jk}^i$ в натуральном репере. С помощью связности $\overset{\circ}{\nabla}$ можно построить лифты тензорных полей, а также горизонтальный лифт ∇^H связности ∇ на расслоение дважды ковариантных тензоров.

7. H-лифт: $\Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$,

$X^H = (X^k)^V \dfrac{\partial}{\partial x^k} + (X^s)^V ((\Gamma_{si}^m)^V x_{mj} + (\Gamma_{sj}^h)^V x_{ih}) \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$, X^i – компоненты векторного поля X.

8. Hγ-лифт: $\Im_0^3(M_n) \to \Im_0^1(T_2^0(M_n))$, $Y^{H\gamma} = (Y^{lmp})^V x_{lm} \partial_p^H$, Y^{lmp} — компоненты тензорного поля Y, ∂_p^H - H-лифт векторного поля $\partial_p = \dfrac{\partial}{\partial x^p}$.

9. Н-лифт линейной связности ∇, который является линейной связностью ∇^H на расслоении $T_2^0(M_n)$ и удовлетворяет условиям:

$$\nabla^H_{Q^V} W^V = 0,\ \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H,\ \nabla^H_{Q^V} X^H = 0,\ \nabla^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V$$

для любых тензорных полей $Q, W \in \Im_2{}^0(M_n)$, $X, Y \in \Im_0{}^1(M_n)$.

Так как $\partial^{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} = (dx^i \otimes dx^j)^V$, и векторные поля $(\partial_p^H, \partial^{ij})$ образуют поле адаптированного репера на расслоении, то

$$\nabla^H_{\partial^{ij}} \partial^{ks} = 0,\ \nabla^H_{\partial_i^H} \partial_j^H = (\Im_{ij}^k)^V \partial_k^H,\ \nabla^H_{\partial^{ij}} \partial_k^H = 0,$$

$$\nabla^H_{\partial_i^H} \partial^{jk} = (-\Im_{ip}^j \delta_q^k - \Im_{iq}^k \delta_p^j)^V \partial^{pq}.$$

Можно показать, что определенные выше отображения не зависят от выбора локальных координат.

Кривизна и кручение связности ∇^H [1]:

$$\tilde{T}(Q^V, W^V) = 0,$$

$$\tilde{T}(X^H, Q^V) = -\tilde{T}(Q^V, X^H) = (\nabla_X Q - \overset{\circ}{\nabla}_X Q)^V,$$

$$\tilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_1} - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_2},$$

$$\tilde{R}(Q^V, W^V)U^V = 0, \qquad \tilde{R}(Q^V, X^H)Y^H = 0,$$

$$\tilde{R}(Q^V, W^V)Y^H = 0,$$

$$\tilde{R}(Q^V, X^H)W^V = 0,\ \tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X,Y)Z)^H,$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Q^V = (-Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y) - Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y))^V.$$

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования связности ∇^H на расслоении $T_2^0(M_n)$.

Пусть $\tilde{X}$ — произвольное инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇^H на расслоении дважды ковариантных тензоров. Необходимым и достаточным условием этого является: $L_{\tilde{X}} \nabla^H = 0$.

Найдем локальное представление производной Ли от горизонтального лифта связности в адаптированном репере:

$$L_{\tilde{X}}\nabla^H(\partial^{ij},\partial^{pq}) = \tilde{R}(\tilde{X},\partial^{ij})\partial^{pq} +$$

$$+\nabla^H_{\partial^{ij}}(\nabla^H_{\partial^{pq}}\tilde{X}) - \nabla^H_{\nabla^H_{\partial^{ij}}\partial^{pq}}\tilde{X} + \nabla^H_{\partial^{ij}}(\tilde{T}(\tilde{X},\partial^{pq})) - \tilde{T}(\tilde{X},\nabla^H_{\partial^{ij}}\partial^{pq}).$$

Используя значения тензоров кривизны и кручения и определение горизонтального лифта связности, получим

$$L_{\tilde{X}}\nabla^H(\partial^{ij},\partial^{pq}) = \nabla^H_{\partial^{ij}}(\nabla^H_{\partial^{pq}}\tilde{X}) + \nabla^H_{\partial^{ij}}(\tilde{T}(\tilde{X},\partial^{pq})).$$

Локальное представление поля $\tilde{X}$ относительно адаптированного репера имеет вид: $\tilde{X} = \tilde{X}^k\partial^H_k + \tilde{X}_{rs}\partial^{rs}$. Поэтому

$$L_{\tilde{X}}\nabla^H(\partial^{ij},\partial^{pq}) = \nabla^H_{\partial^{ij}}(\nabla^H_{\partial^{pq}}(\tilde{X}^k\partial^H_k)) + \nabla^H_{\partial^{ij}}(\nabla^H_{\partial^{pq}}(\tilde{X}_{rs}\partial^{rs})) +$$

$$+\nabla^H_{\partial^{ij}}(\tilde{T}(\tilde{X}^k\partial^H_k,\partial^{pq})) + \nabla^H_{\partial^{ij}}(\tilde{T}(\tilde{X}_{rs}\partial^{rs},\partial^{pq})).$$

Обозначим $S^i_{jk} = \Im^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$, тогда окончательно получим:

$$L_{\tilde{X}}\nabla^H(\partial^{ij},\partial^{pq}) = \partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}^k))\partial^H_k + \partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}_{mr}))\partial^{mr} +$$

$$-(S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m)\partial^{ij}(\tilde{X}^k)\partial^{mr}.$$

Таким образом, $L_{\tilde{X}}\nabla^H(\partial^{ij},\partial^{pq}) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}^k)) = 0,\ \partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}_{mr})) = (S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m)\partial^{ij}(\tilde{X}^k).$$

Из первой группы уравнений системы $\partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}^k)) = 0$ следует $\tilde{X}^k = A^{lmk}x_{lm} + B^k$, где A^{lmk}, B^k — функции, постоянные на слоях.

Интегрируем вторую группу уравнений с учетом полученного результата:

$$\partial^{ij}(\partial^{pq}(\tilde{X}_{mr})) = (S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m)A^{ijk},$$

$\partial^{pq}(\tilde{X}_{mr}) = (S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m)A^{ijk}x_{ij} + C^{pq}_{mr}$, $C^{pq}_{rs}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — функции, постоянные на слоях. Окончательно:

$\widetilde{X}_{mr} = (S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m)A^{ijk}x_{ij}x_{pq}\varepsilon + C^{pq}_{mr}x_{pq} + D_{mr}$, D_{mr} – постоянные на слоях функции, коэффициент ε=1, если в правой части полученного выражения $i \neq p, j \neq q$, и ε = $\frac{1}{2}$, если $i=p, j=q$. Используя определенные выше лифты и обозначая:

$$W^{pq}_{kmr} = S^p_{km}\delta^q_r + S^q_{kr}\delta^p_m,$$

$$A * W = A^{ijk}W^{pq}_{kmr}\partial_i \otimes \partial_j \otimes \partial_p \otimes \partial_q \otimes dx^m \otimes dx^r,$$

$$P^{V\gamma^2_\varepsilon} = \varepsilon(P^{ijpq}_{mr})^V x_{ij}x_{pq}\partial^{mr},$$

получим разложение инфинитезимального аффинного преобразования горизонтального лифта связности на расслоении дважды ковариантных тензоров в виде: $\widetilde{X} = A^{H\gamma} + B^H + C^{V\gamma} + D^V + (A * W)^{V\gamma^2_\varepsilon}$.

Легко заметить, что $A^{H\gamma}+B^H+C^{V\gamma}+D^V+(A * W)^{V\gamma^2_\varepsilon}=0$ тогда и только тогда, когда A=0, B=0, C=0, D=0. Действительно, используя локальное представление каждого слагаемого и независимость полей адаптированного репера, получим $A^{lmk}x_{lm} + B^k = 0$, и $C^{lm}_{rs}x_{lm} + D_{rs} + \varepsilon A^{ijk}W^{pq}_{krs}x_{ij}x_{pq} = 0$. Продифференцируем по x_{ij} обе части каждого равенства: $\partial^{ij}(A^{lmk}x_{lm} + B^k) = 0$, отсюда $A^{ijk} = 0$ и $B^k = 0$. Аналогично, $\partial^{ij}(C^{lm}_{rs}x_{lm} + D_{rs}) = 0$, тогда $C^{lm}_{rs} = 0$, $D_{rs} = 0$.

Таким образом, B =0, D = 0, A = 0, C =0.

Докажем единственность разложения векторного поля $\widetilde{X}$. Предположим, что существует другое разложение

$\widetilde{X} = A_1{}^{H\gamma} + B_1{}^H + C_1{}^{V\gamma} + D_1{}^V + (A_1 * W)^{V\gamma^2_\varepsilon}$, тогда

$$A^{H\gamma}+B^H+C^{V\gamma}+D^V+(A * W)^{V\gamma^2_\varepsilon} = A^{H\gamma}{}_1+B^H{}_1+C^{V\gamma}{}_1+D^V{}_1+(A_1 * W)^{V\gamma^2_\varepsilon},$$

отсюда

$$(A—A_1)^{H\gamma}+(B—B_1)^H+(C—C_1)^{V\gamma}+(D—D_1)^V+(A * W - A_1 * W)^{V\gamma^2_\varepsilon}=0.$$

По доказанному выше получаем: A=A_1, B=B_1, C=C_1, D =D_1, — что доказывает единственность разложения векторного поля $\widetilde{X}$ в полученном виде: $\widetilde{X} = A^{H\gamma} + B^{H} + C^{V\gamma} + D^{V} + (\mathrm{A} * \mathrm{W})^{V\gamma_\varepsilon^2}$.

Список литературы

1. *Монахова О.А.* Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров / Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 88—92.

O. Monakhova

DECOMPOSITION FOR INFINITESIMAL AFFINE TRASFORMATION ON THE BUNDLE $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$

We construct decomposition for infinitesimal affine transformation of horizontal lift of linear connection on the bundle of the tensors of the type (0,2).

УДК 514.76

М.В. Моргун

(Пензенский государственный педагогический университет)

О РАЗМЕРНОСТЯХ АЛГЕБР ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Устанавливается наибольшая размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений двух пространств аффинной связности при условии, что по крайней мере одно из них не является локально проективно плоским.