УДК 514.765

***В. А. Кыров*[1], *Д. М. Шинжина*[2]**
[1, 2] Горно-Алтайский государственный университет, Россия
[1] KyrovVA@yandex.ru; [2] dasasin31@gmail.com
[1] SPIN-код: 8220-8157, [1] AuthorID: 12169
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-6

Кривизна псевдогельмгольцевой группы в связности с векторным кручением

При построении классификации геометрий локальной максимальной подвижности на плоскости (феноменологически симметричных геометрий) Г. Г. Михайличенко была найдена геометрия, названная псевдогельмгольцевой. Им вычислена группа движений этой геометрии, которая задается действием трехмерной матричной группы Ли, называемой псевдогельмгольцевой. Ранее были найдены левоинвариантная метрика на этой группе Ли и компоненты связности Леви-Чивиты на псевдогельмгольцевой группе. Так, для задания левоинвариантной метрики в алгебре Ли псевдогельмгольцевой группы в одной из статей первым соавтором было введено евклидово скалярное произведение, в котором базисные векторы этой алгебры ортонормированы.

В данной статье приводятся явные выражения для компонент связности с векторным кручением. Находится тензор кручения. Вычисляются компоненты тензоров кривизны и Риччи, а также скалярная и секционная кривизны. При этом скалярная кривизна может иметь любой знак. Находится условие, при котором тензор Риччи симметричен. Устанавливается, при каких условиях тензоры Риччи в связности Леви-Чивиты и связности с векторным кручением совпадают. Доказывается, что на псевдогельмгольцевой группе в связности с векторным кручением существует площадка неположительной секционной кривизны.

Поступила в редакцию 31.05.2026 г.
© Кыров В. А., Шинжина Д. М., 2026

Ключевые слова: псевдогельмгольцева группа, связность Леви-Чивиты на группе Ли, связность с векторным кручением, кривизна Риччи, секционная кривизна

Г.Г. Михайличенко была найдена геометрия (псевдогельмгольцева), задаваемая функцией пары точек (метрической функцией) на плоскости [1; 2]:

$$f(1,2) = \frac{(y_2 - y_1)^\alpha}{(x_2 - x_1)^\beta},$$

где $1 = (x_1, x_2), 2 = (y_1, y_2)$ — две произвольные точки плоскости, а α и β – произвольные вещественные числа, причем $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \pm\beta$.

Группа движений такой геометрии задается действием псевдогельмгольцевой группы [3]:

$$G := \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базис алгебры Ли этой группы обозначается e_1, e_2, e_3, выполняются коммутационные соотношения

$$[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = -\beta e_2, [e_3, e_1] = \alpha e_1.$$

В данной алгебре Ли вводится скалярное произведение, относительно которого этот базис ортонормирован:

$$g(e_{i,} e_k) = \delta_{ik}, i, k = 1, 2,$$

где δ_{ik} — симметричный символ Кронекера. Это скалярное произведение задает на группе Ли левоинвариантную метрику.

Связность Леви-Чивиты в группе Ли G с такой левоинвариантной метрикой имеет вид [2]

$$\nabla^g_{e_1} e_1 = \alpha e_3,\ \nabla^g_{e_1} e_2 = 0,\ \nabla^g_{e_1} e_3 = -\alpha e_1,$$
$$\nabla^g_{e_2} e_1 = 0,\ \nabla^g_{e_2} e_2 = \beta e_3,\ \nabla^g_{e_2} e_3 = -\beta e_2,$$
$$\nabla^g_{e_3} e_1 = 0,\ \nabla^g_{e_3} e_2 = 0,\ \nabla^g_{e_3} e_3 = 0.$$

Связность на группе Ли G с векторным кручением задается формулой (см.: [4; 5])

$$\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} = \nabla^{g}_{X}Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где $V = V^1e_1 + V^2e_2 + V^3e_3$ — некоторое фиксированное векторное поле, а $X = X^1e_1 + X^2e_2 + X^3e_3$, $Y = Y^1e_1 + Y^2e_2 + Y^3e_3$ — произвольные векторные поля. В работе [6] вычисляются компоненты этой связности:

$$\nabla_{e_1}e_1 = V^2e_2 + (V^3+\alpha)e_3,\ \ \nabla_{e_1}e_2 = -V^2e_1,$$
$$\nabla_{e_1}e_3 = -(\alpha+V^3)e_1,\ \ \nabla_{e_2}e_1 = -V^1e_2,$$
$$\nabla_{e_2}e_2 = V^1e_1 + (V^3+\beta)e_3,\ \nabla_{e_2}e_3 = -(\beta+V^3)e_2,$$
$$\nabla_{e_3}e_1 = -V^1e_3,\ \nabla_{e_3}e_2 = -V^2e_3,\ \nabla_{e_3}e_3 = V^1e_1 + V^2e_2.$$

Тензор кручения, как известно, определяется формулой [4; 5]

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = g(X,Y)V - g(V,Y)X.$$

Тогда компоненты тензора кручения связности ∇ с векторным кручением следующие:

$$T(e_1,e_1) = V^2e_2 + V^3e_3,\ \ T(e_1,e_2) = -V^2e_1,$$
$$T(e_1,e_3) = -V^3e_1,\ \ T(e_2,e_1) = -V^1e_2,$$
$$T(e_2,e_2) = V^1e_1 + V^3e_3, T(e_2,e_3) = -V^3e_2,$$
$$T(e_3,e_1) = -V^1e_3, T(e_3,e_2) = -V^2e_3,$$
$$T(e_3,e_3) = V^1e_1 + V^2e_2.$$

Далее вычислим компоненты тензора кривизны в группе G, для чего используется формула

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z. \qquad (1)$$

Предложение 1. *Ненулевые компоненты тензора кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты ∇^g имеют следующий явный вид:*

$$R^g(e_1,e_2)e_2 = \alpha\beta e_1,\ \ R^g(e_1,e_2)e_1 = -\alpha\beta e_2,$$
$$R^g(e_1,e_3)e_1 = -\alpha^2 e_3,\ \ R^g(e_1,e_3)e_3 = \alpha^2 e_1,$$
$$R^g(e_2,e_3)e_2 = -\beta^2 e_3,\ \ R^g(e_2,e_3)e_3 = \beta^2 e_2.$$

Для доказательства применяется формула (1), коммутационные соотношения в алгебре Ли и компоненты связности ∇^g.

Предложение 2. *Ненулевые компоненты тензора кривизны группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением имеют следующий явный вид:*

$$R(e_1,e_2)e_1 = -(\alpha+V^3)(\beta+V^3)e_2 + V^2(\beta+V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_2)e_2 = (\alpha+V^3)(\beta+V^3)e_1 - V^1(\alpha+V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_2)e_3 = -V^2(\beta+V^3)e_1 + V^1(\alpha+V^3)e_2,$$
$$R(e_1,e_3)e_1 = V^2V^3e_2 - ((V^2)^2+\alpha^2+\alpha V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_3)e_2 = -V^2V^3e_1 + V^1V^2e_3,$$
$$R(e_1,e_3)e_3 = ((V^2)^2+\alpha^2+\alpha V^3)e_1 - V^1V^2e_2,$$
$$R(e_2,e_3)e_1 = -V^1V^3e_2 + V^1V^2e_3,$$
$$R(e_2,e_3)e_2 = V^1V^3e_1 - ((V^1)^2+\beta^2+\beta V^3)e_3,$$
$$R(e_2,e_3)e_3 = -V^1V^2e_1 + ((V^1)^2+\beta^2+\beta V^3)e_2,$$

Доказательство сводится к применению в формуле (1) компонент связности ∇.

Контравариантный тензор кривизны, как известно, задается формулой [5]

$$R(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T). \qquad (2)$$

Предложение 3. *Компоненты контравариантного тензора кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты* ∇^g *имеют следующий вид:*

$$R^g(e_1,e_2,e_1,e_2) = -\alpha\beta,$$
$$R^g(e_1,e_3,e_1,e_3) = -\alpha^2,$$
$$R^g(e_2,e_3,e_2,e_3) = -\beta^2.$$

Для доказательства применяется формула (2) и результаты предложения 1.

Аналогичный результат получаем и для связности с векторным кручением.

Предложение 4. *Компоненты контравариантного тензора кривизны группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением принимают следующий явный вид:*

$$R(e_1,e_2,e_1,e_2) = -R(e_1,e_2,e_2,e_1) = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3),$$
$$R(e_1,e_2,e_1,e_3) = -R(e_1,e_2,e_3,e_1) = V^2(\beta + V^3),$$
$$R(e_1,e_2,e_2,e_3) = -R(e_1,e_2,e_3,e_2) = -V^1(\alpha + V^3),$$
$$R(e_1,e_3,e_1,e_3) = -R(e_1,e_3,e_3,e_1) = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3),$$
$$R(e_1,e_3,e_2,e_3) = -R(e_1,e_3,e_3,e_2) = V^1V^2,$$
$$R(e_2,e_3,e_1,e_3) = -R(e_2,e_3,e_3,e_1) = V^1V^2,$$
$$R(e_2,e_3,e_2,e_3) = -R(e_2,e_3,e_3,e_2) = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3),$$
$$R(e_2,e_3,e_1,e_2) = -R(e_2,e_3,e_2,e_1) = -V^1V^3,$$
$$R(e_1,e_3,e_2,e_1) = -R(e_1,e_3,e_1,e_2) = -V^2V^3.$$

В дифференциальной геометрии важное место занимает исследование тензора Риччи, который задается формулой

$$r_{ik} = R_{ijks}g^{js}. \qquad (3)$$

Далее приводятся результаты вычисления компонент этого тензора как для связности Леви-Чивиты, так и для связности с векторным кручением. Все подробные вычисления сводятся к применению формулы (3) и результатов предложений 1 и 2.

Предложение 5. *Компоненты тензора Риччи группы Ли G в связности Леви-Чивиты* ∇^g *имеют такой вид:*

$$r_{11}^g = -\alpha^2 - \alpha\beta,\ r_{12}^g = 0,\ r_{13}^g = 0,$$
$$r_{21}^g = 0,\ r_{22}^g = -\alpha\beta - \beta^2,\ r_{23}^g = 0,$$
$$r_{31}^g = 0,\ r_{32}^g = 0,\ r_{33}^g = -\alpha^2 - \beta^2.$$

Предложение 6. *Компоненты тензора Риччи группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением следующие:*

$$r_{11} = R_{1111} + R_{1212} + R_{1313} =$$
$$= -(V^2)^2 - (\alpha + V^3)(\alpha + \beta + V^3),$$
$$r_{12} = R_{1121} + R_{1222} + R_{1323} = V^1V^2,$$
$$r_{13} = R_{1131} + R_{1232} + R_{1333} = V^1(\alpha + V^3),$$
$$r_{21} = R_{2111} + R_{2212} + R_{2313} = V^1V^2,$$

$$r_{22} = R_{2121} + R_{2222} + R_{2323} =$$
$$= -(V^1)^2 - (\beta + V^3)(\alpha + \beta + V^3),$$
$$r_{23} = R_{2131} + R_{2232} + R_{2333} = V^2(\beta + V^3),$$
$$r_{31} = R_{3111} + R_{3212} + R_{3313} = V^1V^3,$$
$$r_{32} = R_{3121} + R_{3222} + R_{3323} = V^2V^3,$$
$$r_{33} = R_{3131} + R_{3232} + R_{3333} =$$
$$= -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3) - ((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3).$$

Найдем условие, при котором тензор Риччи симметричен, то есть $r_{12} = r_{21},\ r_{13} = r_{31},\ r_{23} = r_{32}$. Тогда имеем равенства

$$V^1(\alpha + V^3) = V^1V^3, V^2(\beta + V^3) = V^2V^3.$$

Очевидно, симметрия выполняется тогда и только тогда, когда $V^1 = V^2 = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Тензор Риччи на группе Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением симметричен тогда и только тогда, когда* $V^1 = V^2 = 0$.

Скалярная кривизна в связности Леви-Чивиты вычисляется следующим образом:

$$S^g = r_{ik}^g g^{ik} = -2\alpha^2 - 2\beta^2 - 2\alpha\beta.$$

Скалярная кривизна в связности с векторным кручением:

$$S = r_{ik}g^{ik} = -2(V^1)^2 - 2(V^2)^2 - (\alpha + V^3)(2\alpha + \beta + V^3) -$$
$$- (\beta + V^3)(\alpha + 2\beta + V^3) =$$
$$= -2(V^1)^2 - 2(V^2)^2 - 2(V^3)^2 -$$
$$- 2\alpha^2 - 2\beta^2 - 2\alpha\beta\ - 4(\alpha + \beta\ )V^3.$$

Видно, что знак скалярной кривизны может быть любым. Легко заметить, что при $V^3 = 0$ и $\alpha\beta > 0$ скалярная кривизна строго отрицательна.

Секционная кривизна в направлении линейно независимых векторов X и Y задается формулой [4]

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}. \qquad (4)$$

Предложение 7. *Компоненты тензора секционной кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты ∇^g имеют следующий вид:*

$$K_{12}^g = K^g(e_1, e_2) = -\alpha\beta,$$
$$K_{13}^g = K^g(e_1, e_3) = -\alpha^2,$$
$$K_{23}^g = K^g(e_2, e_3) = -\beta^2.$$

Для вычисления этих компонент применяем результаты предложения 3 в формуле (4).

Несложно заметить, что

$$K_{13}^g + 2K_{12}^g + K_{23}^g = -(\alpha + \beta)^2.$$

Предложение 8. *Компоненты тензора секционной кривизны группы Ли G в связности с векторным кручением ∇ имеют вид:*

$$K_{12} = K(e_1, e_2) = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3),$$
$$K_{13} = K(e_1, e_3) = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3),$$
$$K_{23} = K(e_2, e_3) = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3).$$

Легко заметить, что

$$K_{13} + 2K_{12} + K_{23} = -(V^1)^2 - (V^2)^2 - 2(V^3)^2 - $$
$$-3(\alpha + \beta)V^3 - (\alpha + \beta)^2.$$

Заметим, что эти результаты можно получить как непосредственно, применяя формулу (4), так и используя другую формулу [4]:

$$K(X, Y) = K^g(X, Y) + g([Y, V], Y) + g([X, V], X) +$$
$$+ \pi^2(X) + \pi^2(Y) - \pi(V),$$

которая верна для произвольных двух линейно независимых ортонормированных векторов X и Y, причем $\pi(X) = g(X, V)$. Очевидно, справедливы равенства

$$\pi(e_1) = V^1, \quad \pi(e_2) = V^2, \quad \pi(e_3) = V^3,$$
$$\pi(V) = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2.$$

Следствие. *Секционные кривизны в связностях Леви-Чивиты и с векторным кручением при* $V \neq 0$ *совпадают тогда и только тогда, когда*

$$V^3 = -\alpha - \beta \neq 0,\ (V^1)^2 = (\alpha+\beta)\beta,\ \ (V^2)^2 = (\alpha+\beta)\alpha,$$

причем $\alpha\beta > 0$.

Теорема 2. На *группе Ли G с заданной выше левоинвариантной римановой метрикой в связности* ∇ *с векторным кручением существует площадка неположительной секционной кривизны.*

Доказательство. Предположим, что для любой площадки секционная кривизна строго положительна:

$$K_{12} = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3) > 0,$$
$$K_{13} = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3) > 0,$$
$$K_{23} = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3) > 0.$$

Положим $V^3 = 0$, тогда получим неравенства

$$K_{12} = -\alpha\beta > 0,\ K_{13} = -(V^2)^2 > 0,\ K_{23} = -(V^1)^2 > 0.$$

Очевидно, последние два неравенства противоречивы. Теорема доказана.

В конце статьи заметим, что в работах [7; 8] изучаются поверхности в псевдогельмгольцевой группе.

Список литературы

1. *Михайличенко Г.Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск, 2016.

2. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул, 2003.

3. *Кыров В.А.* Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30, №4. С. 24—36. doi: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36.

4. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* О секционной кривизне связностей с векторным кручением // Изв. вузов. Математика. 2020. №6. С. 86—92. doi: 10.26907/0021-3446-2020-6-86-92.

5. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* Уравнения Эйнштейна на трехмерных локально симметричных (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26, №4. С. 25—36. doi: 10.25587/SVFU.2019.49.61.003.

6. *Кыров В.А., Захарьев В.А.* Связности на группах Гельмгольца // Научный вестник Горно-Алтайского государственного университета. 2025. №19. С. 15—18.

7. *Кыров В.А.* Поверхности на псевдогельмгольцевой группе // Математические заметки. 2025. Т. 117, №2. С. 285—294. doi: https://doi.org/10.4213/mzm14390.

8. *Кыров В.А.* Поверхности на группах гельмгольцева типа // Сибирский математический журнал. 2025. Т. 66, №5. С. 909—923. doi: 10.33048/smzh.2025.66.511.

Для цитирования: *Кыров В.А., Шинжина Д.М.* Кривизна псевдогельмгольцевой группы в связности с векторным кручением // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 52—62. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-6.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 53C35

V. A. Kyrov[1], *D. M. Shinzhina*[2]
[1, 2] *Gorno-Altaisk State University,*
Lenkina Str., 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia
[1] KyrovVA@yandex.ru; [2] dasasin31@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-6

Curvature of the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion

Submitted on May 31, 2026

While constructing a classification of geometries of local maximum mobility on the plane (phenomenologically symmetric geometries), Gennady Grigorievich Mikhailichenko discovered a

geometry called pseudo-Helmholtz. He calculated the group of motions of this geometry, which is defined by the action of a three-dimensional matrix Lie group, called the pseudo-Helmholtz group. Previously, a left-invariant metric on this Lie group and the Levi-Civita connection components on the pseudo-Helmholtz group were found. Thus, to define a left-invariant metric in the Lie algebra of the pseudo-Helmholtz group, in one of the articles, the first co-author introduced the Euclidean scalar product, in which the basis vectors of this algebra are orthonormal.

This article provides explicit expressions for the connection components with vector torsion. The torsion tensor is found. The components of the curvature and Ricci tensors, as well as the scalar and sectional curvatures, are calculated. The scalar curvature can have either sign. A condition is found under which the Ricci tensor is symmetric. It is established under what conditions the Ricci tensors in the Levi-Civita connections and those with vector torsion coincide. It is proved that a region of nonpositive sectional curvature exists on the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion.

Keywords: pseudo-Helmholtz group, Levi-Civita connection on a Lie group, connection with vector torsion, Ricci curvature, sectional curvature

References

1. *Mikhailichenko, G.G.:* Mathematical foundations and results of the theory of physical structures. Gorno-Altaisk (2016).

2. *Mikhailichenko, G.G.:* Group symmetry of physical structures. Barnaul (2003).

3. *Kyrov, V.A.:* Left-invariant metrics of some three-dimensional Lie groups. Mathematical notes of NEFU, **30**:4, 24—36 (2023), doi: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36.

4. *Klepikov, P.N., Rodionov, E.D., Khromova, O.P.:* On the sectional curvature of connections with vector torsion. News of universities. Mathematics, 6, 86—92 (2020), doi: 10.26907/0021-3446-2020-6-86-92.

5. *Klepikov, P.N., Rodionov, E.D., Khromova, O.P.:* Einstein equations on three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vector torsion. Math. Notes of NEFU, **26**:4, 25—36 (2019), doi: 10.25587/SVFU.2019.49.61.003.

6. *Kyrov, V.A., Zakharyev, V.A.*: Connections on Helmholtz groups. Scientific Bulletin of the Gorno-Altai State University, 19, 15—18 (2025).

7. *Kyrov, V.A.:* Surfaces on the pseudo-Helmholtz group. Math. Notes, **117**:2, 300—308 (2025). doi: https://doi.org/10.1134/S0001434625010274.

8. *Kyrov, V.A.:* Surfaces on Helmholtz type groups. Siberian Math. J., **66**:5, 1218—1230 (2025), doi: 10.1134/S0037446625050118.

For citation: Kyrov, V.A., Shinzhina, D.M.: Curvature of the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion. DGMF, **57**:2, 52—62 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-6.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)