SUMMARY PAPER "ABOUT EQUIPPET DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS"

The paper equippet in the sense of E.Cartan distribution of hyperplane elements, dipped into the space a connexion projektive; in case of mutual normalization of submanifolds there is an invariant link among them.

УДК 514.7

ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОЛЕ КИЛЛИНГА С ОСОБЕННОСТЬЮ

И.А.У н д а л о в а

(Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского)

В работе изучаются аналитические 4-мерные лоренцевы многообразия, допускающие однопараметрическую группу движений с изолированной неподвижной точкой O. Получен вид метрики таких пространств. Найдены условия, при выполнении которых, точка O является полюсом (в смысле А.С. Солодовникова).

Пусть $V^4=(M,g)$ – 4-мерное, аналитическое лоренцево многообразие, допускающее однопараметрическую группу движений (G_1) с изолированной неподвижной точкой O. Известно [1],[2], что можно подобрать нормальную (с центром в O) систему координат, относительно которой компоненты A^α векторного поля A группы G_1 имеют вид:

$$A^1=x^2 ,\ A^2=-x^1 ,\ A^3=c^2x^4 ,\ A^4=x^3 , \qquad (1)$$

где x^α ($\alpha,\beta=1,...,4$) - нормальные координаты произвольной точки, а c -некоторая отличная от нуля постоянная. Среди всех траекторий группы G_1 геодезическими являются только изотропные кривые : $x^1=0$, $x^2=0$, $x^3=\pm cx^4$. Решая уравнения* $(D^L_A g)_{\alpha\beta}=0$, $\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}x^\beta x^\sigma=0$, можно найти компоненты $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора g относительно данной нормальной системы координат [2]:

$g_{11}=1+n(x^2)^2+k\omega-2m_2\omega x^1x^2$, $g_{22}=1+n(x^1)^2+k\omega+2m_2\omega x^1x^2$,

$g_{12}=-nx^1x^2+m_2\omega(x^1)^2-m_2\omega(x^2)^2$, $g_{13}=-kx^1x^3+m_2y^2x^2x^3+m_4\omega x^1x^4+m_6x^2x^4$,

$g_{14}=c^2kx^1x^4-c^2m_2y^2x^2x^4-m_4\omega x^1x^3-m_6x^2x^3$, $g_{23}=-kx^2x^3-m_2y^2x^1x^3+m_4\omega x^2x^4-m_6x^1x^4$, (2)

$g_{24}=c^2kx^2x^4+c^2m_2y^2x^1x^4-m_4\omega x^2x^3+m_6x^1x^3$, $g_{33}=1+ky^2+\delta(x^4)^2-2m_4y^2x^3x^4$,

$g_{34}=m_4y^2(x^3)^2+m_4y^2c^2(x^4)^2-\delta x^3x^4$, $g_{44}=-c^2-c^2ky^2+\delta(x^3)^2-2c^2m_4y^2x^3x^4$,

---

* Здесь и в дальнейшем D^L_A-дифференциал Ли на базе векторного поля A, $\Gamma^\alpha_{\beta\sigma}$- коэффициенты связности ∇, определенной метрикой g.

где $y^2=(x^1)^2+(x^2)^2$,$\omega=(x^3)^2-c^2(x^4)^2$, $k=f_2+m_3\omega$, $n=f_1-m_1\omega$, $\delta= r+m_5y^2$, f_1 , f_2 - аналитические функции от y^2, r - аналитическая функция ω, m_i (i=1,...,6) - аналитические функции переменных y^2,ω.

В V^4 наряду с полем A рассмотрим поля B и C, компоненты которых относительно исходной системы координат определены формулами:

$$B^1=x^2 ,\ B^2=-x^1 ,\ B^3=0 ,\ B^4=0 ; \qquad (3)$$

$$C^1=0 ,\ C^2=0 ,\ C^3=c^2x^4 ,\ C^4=x^3 . \qquad (4)$$

Множество неподвижных точек B – вполне геодезическая поверхность: $x^1=0,x^2=0$. Все неподвижные точки C принадлежат пересечению вполне геодезических изотропных гиперповерхностей $x^3=cx^4$, $x^3=-cx^4$. Используя (2), можно проверить, что $D^L_B g=0$, $D^L_C g=0$, т.е. B и C – поля Киллинга. Так как [B,C]=0, то 2-мерное распределение $R_{(B,C)}$, определяемое полями B,C – вполне интегрируемо и поля B,C порождают группу движений G_2 , подгруппой которой является исходная группа G_1.

Нетрудно видеть, что 2-мерное распределение, порожденное векторными полями S и D:

$$S^1=x^1 ,\ S^2=x^2 ,S^3=x^3 ,\ S^4=x^4 ; \qquad (5)$$

$$D^1=Tx^2 ,\ D^2=-Tx^1 ,\ D^3=Wc^2x^4-Fx^3 ,\ D^4=Wx^3-Fx^4 , \qquad (6)$$

где $T=(-c^2+\delta\omega-c^2ky^2)m_2\omega y^2+m_4m_6\omega^2y^2$, $W=(1+ny^2+k\omega)m_4\omega y^2+m_2m_6\omega y^4$,

$F=(-c^2+\delta\omega-c^2ky^2)(1+ny^2+k\omega)-m_6^2\,\omega y^2$, ортогонально $R_{(B,C)}$. Это распределение будет вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда в формулах (2) $m_2=m_4=0$.

Будем называть точку p бирегулярной точкой поля B, если в ней $\nabla_B B\neq\mu B$. Поле B относят к типу “B” [3], если точки p , в которых $\nabla_B B=\mu B$, не заполняют сплошь никакую открытую область V^4, а в окрестности всякой бирегулярной точки форма $\psi=\langle B,\lambda\rangle$ [1] второго класса. Справедливы

Теорема 1. В лоренцевом многообразии (2) поле Киллинга B с компонентами (3) тогда и только тогда принадлежит типу “B”, когда в формулах (2) $m_2=m_6=0$. В этом случае в V^4 существует 3-мерное (ортогональное B) геодезическое распределение.

Теорема 2. В лоренцевом многообразии (2) поле Киллинга C с компонентами (4) тогда и только тогда принадлежит типу “B”, когда в формулах (2) $m_2=m_6=0$. В этом случае в V^4 существует 3-мерное (ортогональное C) геодезическое распределение.

Известно [4], что если D-поле Киллинга с неподвижной точкой O, то в нормальной (с центром в O) системе координат его компоненты запишутся: $D^1=ax^2+bx^3+ec^2x^4$, $D^2=-ax^1+dx^3+fc^2x^4$, $D^3=-bx^1-dx^2+gc^2x^4$, $D^4=ex^1+fx^2+gx^3$ (a,b,d,e,f,g-произвольные постоянные). Следовательно (см.(3),(4)) D=aB+gC+☞ , где ☞ – поле Киллинга с компонентами

---

[1] $\langle B,\lambda\rangle$ - скалярное произведение B(p) на произвольный касательный в p к V^4 вектор $\lambda(p)$.

☞ $^1=bx^3+ec^2x^4$, ☞$^2=dx^3+fc^2x^4$, ☞$^3=bx^1-dx^2$, ☞$^4=ex^1+fx^2$. (7)

Подставляя в равенства $(D^L_F\, g)_{\alpha\beta}=0$, ☞$^\alpha$, $g_{\alpha\beta}$ из (7) и (2) соответственно и проводя определенную вычислительную работу, выясняем, что ☞ –является полем Киллинга тогда и только тогда, когда

$$\delta=-c^2k\ ,\ m_2=m_4=m_6=0\ ,\ n=k\ ,\ k=k(y^2+\omega)\ .$$

Поля E,N,Z,M с компонентами

$$E^1=x^3\ ,\ E^2=0\ ,\ E^3=-x^1\ ,\ E^4=0\ ;\ N^1=c^2x^4\ ,\ N^2=0\ ,\ N^3=0\ ,\ N^4=x^1\ ;$$
$$Z^1=0\ ,\ Z^2=x^3\ ,\ Z^3=-x^2\ ,\ Z^4=0\ ;\ M^1=0\ ,\ M^2=c^2x^4\ ,\ M^3=0\ ,\ M^4=x^2$$

в пространстве метрики (2),(8) являются полями Киллинга и вместе с полями B и C порождают группу движений G_6. Таким образом, доказана

Теорема 3. Неподвижная точка O группы G_1 является полюсом пространства V^4 тогда и только тогда, когда метрика пространства в некоторой нормальной системе координат имеет вид (2),(8), т.е.

$$ds^2 = d\underset{0}{s}^2 + k\rho^2\left[\varepsilon d\underset{0}{s}^2 - \left(d\rho\right)^2\right], \qquad (9)$$

где $d\underset{0}{s}^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2-c^2(dx^4)^2$, $c=const$, $\varepsilon=\pm1$,

$\rho^2=\varepsilon[(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-c^2(x^4)^2\ ]$, k - функция переменной ρ^2.

Для пространства метрики (9) подсчитаны скалярная кривизна, тензор Риччи, тензор энергии-импульса.

В пространстве метрики (9) поле S с компонентами (5) определяет одномерное геодезическое направление с особой точкой O. Так как $|s|^2=y^2+\omega$, то только в точках p изотропного конуса: $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-c^2(x^4)^2=0$ длина вектора Q_p равна нулю. Данное геодезическое поле совпадает с изучавшимся в [5] геодезическим полем одномерных направлений.

Точки нормальной окрестности, для которых $\omega+y^2<0$ будем называть “внутренними” по отношению к изотропному конусу, точки для которых $\omega+y^2>0$ будем называть “внешними”. Пусть точка p - “внешняя” и для нее $\omega>0$, $y^2\neq0$. Тогда в некоторой окрестности точки p можно перейти к новым координатам z^α , в которых

$$ds^2=(dz^1)^2+[(z^1)^2+k(z^1)^4](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{1}{c^2}|C|^2(dz^4)^2-2m_2\sin^3 z^2\cos z^2(z^1)^6dz^2dz^3+$$
$$+2\frac{1}{6}m_4\sin z^2\cos^3 z^2(z^1)^6dz^2dz^4-2\frac{1}{c}<B,C>dz^3dz^4. \qquad (10)$$

Если распределение $R_{(S,D)}$ голономно, то в (10) $m_2=m_4=0$. Если поля B и C типа “B”, то

$$ds^2=(dz^1)^2+[(z^1)^2+k(z^1)^4](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{1}{c^2}|C|^2(dz^4)^2.$$

Если точка p “внешняя”, но для нее $\omega<0$, $y^2\neq0$, то в некоторой окрестности p

$$ds^2=(dz^1)^2-\frac{\left(z^1\right)^2}{\cos^2 z^2}[1+k(z^1)^2](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{1}{c^2}|C|^2(dz^4)^2-2m_2(z^1)^6\frac{\sin z^2}{\cos^5 z^2}dz2dz3-$$

$$-2\frac{m_4}{c}(z^1)^6\frac{\sin^3 z^2}{\cos^5 z^2}dz^2dz^4-\frac{2}{c}<B,C>dz^3dz^4. \qquad (11)$$

Если при этом поля B и C типа “B”, то

$$ds^2=(dz^1)^2-\frac{(z^1)^2}{\cos^2 z^2}[1+k(z^1)^2](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{|c|^2}{c^2}(dz^4)^2 .$$

Пусть точка p “внутренняя” и для нее $\omega<0$, $y^2\neq 0$. Тогда

$$ds^2=-(dz^1)^2+\frac{(z^1)^2}{\cos^2 z^2}[1-k(z^1)^2](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{1}{c^2}|C|^2(dz^4)^2+$$

$$+2m_2(z^1)^6\frac{\sin^3 z^2}{\cos^5 z^2}dz^2dz^3+2\frac{m_4}{c}(z^1)^6\frac{\sin^2 z^2}{\cos^6 z^2}dz^2dz^4-2\frac{1}{c}<B,C>dz^3dz^4. \qquad (12)$$

В частности, когда B и C типа “B”, то

$$ds^2=-(dz^1)^2+\frac{(z^1)^2}{\cos^2 z^2}[1-k(z^1)^2](dz^2)^2+|B|^2(dz^3)^2+\frac{1}{c^2}|C|^2(dz^4)^2 .$$

В случае, когда V^4 имеет точку O полюсом, его метрику с использованием (10)-(12) можно записать в виде [6] :

$$ds^2=\varepsilon(d\rho)^2+f_\varepsilon(\rho)d\theta_\varepsilon^2 ,$$

где $\varepsilon=+1$ для “внешних” точек, $\varepsilon=-1$ для “внутренних” точек, $\rho^2=\varepsilon(y^2+\omega)$, $d\theta_-^2$ - метрика пространства типа (+++) постоянной кривизны -I, $d\theta_+^2$ - метрика пространства типа (+- -) постоянной кривизны -I, $f_\varepsilon(\rho)=|C|^2-|B|^2$.

Работа поддержана РФФИ (проект № 96-01-00215).

Библиографический список

1. *Минцнефес И.М., Ундалова И.А.* Однопараметрические группы движений псевдориманова пространства V^4 // Материалы IV науч. конф. мол. уч. мех.-мат.ф-та. С.64-71. Деп. в ВИНИТИ 30.07.79, № 2856-79.

2. *Ундалова И.А., Арясова С.Н.* Псевдориманово пространство V^4, допускающее однопараметрическую группу движений с изолированной неподвижной точкой / Горьковский гос. ун-т. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 28.08.87, №6361-В87.

3. *Шапиро Я.Л.* Статические римановы пространства в целом // Изв. вузов. Мат. 1974. № 3. С. 78-88.

4. *Vranceanu G.* Sur le groupe de stabilile d′un espace a′connexion affine // Bull. math. Soc. Sci. math. et. phys RPR. 1957. № 1. P.121-124.

5. *Шапиро Я.Л., Игошин В.А.* Особые точки геодезического поля // Изв. вузов. Мат. 1984. № 9. С. 79-82.

6. *Камышанский Н.П., Солодовников А.С.* Псевдоримановы пространства с полюсами (многомерный случай) // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: МГУ, 1978. Вып.18. С.300-320.

I.A. U n d a l o v a

LORENTZ'S MANIFOLDS, ADMITTING KILLING'S PLANE WITH A SINGULARITY

Analitical 4-dimentional Lorentz's manifolds admitting one-parameter group of motion with an isolated fixed point O are studied in the article. A form of metric of such spaces is obtained. Conditions are found under which the point O is a pole (in the sense of A.S.Solodovnikov).

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

Т.П. Ф у н т и к о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QL)_{3,1}$, порожденные квадрикой Q и прямой L, причем многообразие квадрик Q - трехмерное, а прямых L - одномерное. Изучены классы вырожденных комплексов $(QL)_{3,1}$, для которых центры квадрик Q описывают поверхность (P).

Между образующими элементами вырожденного комплекса $(QL)_{3,1}$ устанавливается соответствие, при котором каждой квадрике Q соответствует единственная прямая L, полным прообразом которой является двупараметрическое семейство квадрик Q_L. Устанавливается также соответствие между множествами (L) и(P), при котором каждой прямой L соответствует на (P) линия Γ_L.

Отнесем вырожденный комплекс $(QL)_{3,1}$ к реперу $R=\{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: точка A совмещена с центром P квадрики Q; векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ принадлежат касательной плоскости к поверхности (P); конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой пересечения прямой L и касательной плоскости, а вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_4; вектор $\bar{e}_3$ параллелен прямой L; концы векторов $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ инцидентны квадрике Q.

Квадрика (эллипсоид) Q в репере R задается уравнением

$$a_1(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^{2-}2a_2x_1x_2-2a_3x_1x_3-2a_4x_2x_3-1=0\ .$$

Так как векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ принадлежат касательной плоскости к поверхности (A), то

$$d\bar{A}=\omega^1\bar{e}_1+\omega^2\bar{e}_2,\ \omega^3=0,$$

следовательно

$$\omega_1^3=\kappa\omega^1+n\omega^2,\ \omega_2^3=n\omega^1+m\omega^2.$$

Вектор $\bar{e}_3$ параллелен прямой L и многообразие (L) -одномерное, т.е.