ении канонического репера были исключены случаи: 1) поверхность (A_2) является торсом; 2) поверхность (A_0) вырождается в линию; 3) касательная плоскость к поверхности (A_0) содержит точку A_1. Назовем такой класс прямолинейных конгруэнций с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью конгруэнцией V. Из замыкания системы (11) следует (см., например, [1, с.62], [2, с.21]).

Т е о р е м а 1. Конгруэнция V существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Построим пример прямолинейной конгруэнции с фокальной линией, ассоциированной с поверхностью. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 гладкую поверхность S, не являющуюся торсом. Отнесем поверхность S к реперу первого порядка $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 – текущая точка поверхности, вершины A_1 и A_2 расположены в касательной плоскости к поверхности S в этой точке. Система уравнений Пфаффа такой поверхности S приведена в работе [3, с.4 – 7].

Пусть точка Φ – фокус луча A_0A_3. Потребуем, чтобы поверхность (A_3) вырождалась в линию и чтобы $\Phi \equiv A_3$, тогда получим:

$$\omega_3^0 = \mu\,\omega_2^0\,,\quad \omega_1^0 = \lambda\,\omega_2^0\quad (\lambda \neq 0, \mu \neq 0). \qquad (12)$$

Назовем данную конгруэнцию директрис Вильчинского $[A_0A_3]$ с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью конгруэнцией $\widetilde{V}$. Замыкая систему уравнений поверхности S, убеждаемся в справедливости утверждения:

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $\widetilde{V}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986.

УДК 514.75

ЛИНИИ ПСЕВДОФОКУСОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_2 В E_4

Н.И.Г у с е в а

(Московский государственный педагогический университет)

1. Основные сведения. В расширенном евклидовом пространстве E_4 рассматривается подвижной репер $R = \{A, \vec{e}_i\}$ $(i,j = \overline{1,4})$, деривационные уравнения которого

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i\,,\quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \qquad (1.1)$$

По одинаковым индексам разных уровней производится суммирование в соответствующих пределах.

В каждой точке A пространства по определенному закону зададим 2-плоскость $\Delta_2(A)$. При этом говорят, что в E_4 задано распределение Δ_2. Совместим вершину репера с рассматриваемой точкой, векторы $\vec{e}_a$ $(a,b = 1,2)$ расположим в 2-плоскости распределения $\Delta_2(A)$, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta = 3,4)$ – в ортогональной плоскости $\Delta_2^{\perp}(A)$. Такое расположение векторов репера определяет соотношения

$$\omega_\alpha^a = -\,\omega_a^\alpha. \qquad (1.2)$$

Интегральными линиями распределения называют линии, которые в каждой своей точке касаются соответствующей 2-плоскости распределения. Вдоль таких линий выполняются условия

$$\omega^\alpha = 0\,. \qquad (1.3)$$

Дифференциальные уравнения распределения в этом случае выглядят так:

$$\omega_a^\alpha = \Gamma_{ai}^\alpha\,\omega^i. \qquad (1.4)$$

Компоненты $\{\Gamma_{ab}^\alpha\}$ образуют тензор, в общем случае несимметричный по нижним индексам. Условия

$$\Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{12}^\alpha = 0 \qquad (1.5)$$

называют условиями интегрируемости распределения. Если они выполнены, то все интегральные кривые, проходящие через одну точку, располагаются в окрестности этой точки на двумерной поверхности. Такое распределение называют голономным.

2. Прямые псевдофокусов сетей распределения. Сетью линий распределения Δ_2 называется пара семейств интегральных линий таких, что через каждую точку A пространства E_4 проходит по одной линии каждого семейства, причем векторы, касательные

к этим линиям в точке A, линейно независимы.

Псевдофокусом сети $(d_1\vec{A}, d_2\vec{A})$, где

$$d_1\vec{A} = \bar{\omega}^a \vec{e}_a, \quad d_2\vec{A} = \bar{\bar{\omega}}^a \vec{e}_a, \tag{2.I}$$

на нормали $\vec{n} = \mu^\alpha \vec{e}_\alpha$ называется точка $F \in (A, \vec{n})$, для которой имеет место: $d_a\vec{F} \in (d_b\vec{A}, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, где $a \neq b$, d_a означает дифференцирование вдоль a- й линии сети [1]. Найдем псевдофокус $\vec{F} = \vec{A} + \lambda\vec{n}$. Для этого разрешим (2.I) относительно $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и, подставив полученные выражения в

$$d_a\vec{F} = \omega^i \vec{e}_i + d_a(\lambda\mu^\alpha)\vec{e}_\alpha + \lambda\mu^\alpha\omega^i_\alpha\vec{e}_i,$$

потребуем обращения в ноль коэффициента при $d_a\vec{A}$. Используя равенства (I.I) - (I.3), получим

$$\begin{cases} \lambda_1\mu_\alpha(\bar{\omega}^\alpha_1\bar{\bar{\omega}}^2 - \bar{\omega}^\alpha_2\bar{\bar{\omega}}^1) - (\bar{\bar{\omega}}^1\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^1\bar{\bar{\omega}}^2) = 0, \\ \lambda_2\mu_\alpha(\bar{\bar{\omega}}^\alpha_2\bar{\omega}^1 - \bar{\bar{\omega}}^\alpha_1\bar{\omega}^2) - (\bar{\bar{\omega}}^1\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^1\bar{\bar{\omega}}^2) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

На выбранной нормали $(A, \vec{n})$ данная сеть $(d_1\vec{A}, d_2\vec{A})$ порождает, вообще говоря, пару псевдофокусов $\vec{F}_a = \vec{A} + \lambda_a\vec{n}$. С учетом равенст (I.3), (I.4) получим

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\mu_\alpha(\Gamma^\alpha_{21}\kappa_1\kappa_2 - \Gamma^\alpha_{11}\kappa_1 + \Gamma^\alpha_{22}\kappa_2 - \Gamma^\alpha_{12})} = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\mu_\alpha\mathcal{L}^\alpha_1}, \\ \\ \lambda_2 = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\mu_\alpha(\Gamma^\alpha_{21}\kappa_1\kappa_2 - \Gamma^\alpha_{11}\kappa_2 + \Gamma^\alpha_{22}\kappa_1 - \Gamma^\alpha_{12})} = \dfrac{\kappa_2 - \kappa_1}{\mu_\alpha\mathcal{L}^\alpha_2}, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\kappa_1 = \dfrac{\bar{\omega}^1}{\bar{\omega}^2}$, $\kappa_2 = \dfrac{\bar{\bar{\omega}}^1}{\bar{\bar{\omega}}^2}$.

В системе координат $(A, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ псевдофокус $\vec{F}_a = A + \lambda_a\mu^\alpha\vec{e}_\alpha$ имеет координаты $x_\alpha = \mu_\alpha\lambda_a$. Исключая из этой системы уравнений (при фиксированном a) величины μ_3, μ_4, получим, что псевдофокусы взятой сети всех нормалей образуют прямую Φ_a, уравнение которой, с учетом равенств (2.3), может быть записано

$$x_\alpha\mathcal{L}^\alpha_a + (\kappa_1 - \kappa_2) = 0. \tag{2.4}$$

Каждая сеть определяет в плоскости $\Delta^\perp_2$ две прямые псевдофокусов Φ_a, определенных уравнениями (2.4). Так как сеть невырождена, $\kappa_1 \neq \kappa_2$, то прямые псевдофокусов не проходят через точку A.

3. I- я поляра распределения Δ_2. На нормали $(A, \vec{n})$ найдем точку $\vec{F}_0 = \vec{A} + \lambda_0\vec{n}$, которая вместе с точкой A гармонически разделяет псевдофокусы выбранной сети. Из соотношения $(AF_0, F_1F_2) = -1$ следует $\lambda_0 = \dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Используя равенства (2.3), получим

$$\lambda_0 = \frac{2}{\mu_\alpha(\Gamma^\alpha_{11} + \Gamma^\alpha_{22})} \tag{3.I}$$

Это выражение не зависит от взятой сети. Справедлива

Т е о р е м а I. На всякой нормали существует и единственна точка, которая вместе с точкой A гармонически разделяет псевдофокусы любой сети распределения Δ_2.

Эта точка названа гармоническим полюсом нормали. В системе координат $(A, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ гармонический полюс имеет координаты

$$x_\alpha = \frac{2\mu_\alpha}{\mu_\alpha(\Gamma^\alpha_{11} - \Gamma^\alpha_{22})}.$$

Исключая из этой системы μ_3, μ_4, получим, что гармонические полюсы всех нормалей образуют прямую, уравнение которой

$$x_\alpha(\Gamma^\alpha_{11} + \Gamma^\alpha_{22}) - 2 = 0. \tag{3.2}$$

Она названа первой полярой нормальной 2-плоскости $\Delta^\perp_2(A)$. Можно убедиться в том, что прямая (3.2) является полярой точки A относительно фокусной (присоединенной) кривой распределения [2]. Сравнивая уравнение (3.2) с выражением вектора средней кривизны распределения [3] $\vec{H} = H^\alpha\vec{e}_\alpha = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha_{11} + \Gamma^\alpha_{22})\vec{e}_\alpha$, приходим к выводу, что уравнение I- й поляры может быть записано в виде

$$x_\alpha H^\alpha - 1 = 0. \tag{3.2}$$

Анализ равенств (3.I) и (3.2) показывает, что справедлива

Т е о р е м а 2. Для минимальных распределений (для которых $\vec{H} \equiv \vec{0}$) гармонический полюс любой нормали является ее несобственной точкой, а I- я поляра - несобственной прямой 2-плоскости $\Delta^\perp_2(A)$. Для неминимальных распределений I- я поляра перпендикулярна вектору средней кривизны распределения в этой точке.

4. Взаимное расположение I- й поляры и прямых псевдофокусов сети. Из уравнений прямых псевдофокусов Φ_a (2.4) и уравнения (3.2) I- й поляры можно получить соотношение

$$\tilde{\Phi}_2 = -\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\mathfrak{I}}(\kappa_2 - \kappa_1) = 0, \tag{4.I}$$

где через $\tilde{\Phi}_a$ обозначены левые части уравнений (2.4), через $\tilde{\mathfrak{I}}$ - левая часть уравнения (3.2). Из последнего соотношения следуют:

Т е о р е м а 3. У всех сетей минимального распределения прямые псевдофокусов параллельны между собой.

7*

Т е о р е м а 4. I- я поляра неминимального распределения состоит из точек пересечения прямых псевдофокусов всех сетей этого распределения.

Т е о р е м а 5. Для неминимального распределения прямые псевдофокусов параллельны между собой только в случае, когда они параллельны I- й поляре распределения в этой точке.

Условие параллельности прямых псевдофокусов Φ_1 и Φ_2 имеют вид

$$2k_1k_2 H^{[3}\Gamma^{4]}_{21} + (k_1+k_2)\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} - 2H^{[3}\Gamma^{4]}_{12} = 0. \qquad (4.2)$$

Если сеть, порождающая Φ_1 и Φ_2, ортогональна, т.е. $k_1k_2=-1$, то условие (4.2) приобретает вид

$$(k^2-1)\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} - 2k H^{[3}(\Gamma^{4}_{12}+\Gamma^{4]}_{21}) = 0. \qquad (4.3)$$

Легко проверить, что это уравнение сети, для которой векторы нормальных кривизн параллельны между собой и параллельны вектору средней кривизны. Отсюда следует

Т е о р е м а 6. Для неминимального распределения существует и единственна сеть, для которой прямые псевдофокусов параллельны между собой, при этом они параллельны I- й поляре в этой точке. Это сеть линий, для которой векторы нормальных кривизн параллельны вектору средней кривизны распределения в этой точке.

В работе [2] рассмотрена сеть куспидальных линий как линий, вдоль которых 2-плоскости распределения в бесконечно близких точках пересекаются не в точке, а по прямой. Эта сеть определяется уравнением

$$\omega^3_1\omega^4_2 - \omega^3_2\omega^4_1 = 0. \qquad (4.4)$$

Для каждой одномерной нормали $\vec{n}=\mu^\alpha\vec{e}_\alpha$ в общем случае однозначно определяется сеть линий кривизны 2-го рода [5] как линий, вдоль которых выбранные нормали образуют развертывающуюся поверхность. Эта сеть определяется уравнением

$$\mu_\alpha(\omega^\alpha_1\omega^2 - \omega^\alpha_2\omega^1) = 0. \qquad (4.5)$$

Сеть, являющаяся сетью линий кривизны 2-го рода относительно двух нормалей обладает этим свойством относительно любой нормали. Это сеть линий кривизны 2-го рода распределения.

Т е о р е м а 7. Линии кривизны 2-го рода распределения являются куспидальными линиями этого распределения.

Этот факт можно обосновать, заметив, что из уравнения

(4.5) для $\vec{n}=\vec{e}_3$ и $\vec{n}=\vec{e}_4$ вытекает равенство (4.4), которое определяет куспидальные линии распределения.

Обратное, вообще говоря, неверно. Достаточно поместить вектор $\vec{e}_1$ репера R по одному из куспидальных направлений. При этом из (4.4) и (I.4) будет следовать: $\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{21} = 0$. Пара $(\omega^1, 0)$ не обязательно является решением системы уравнений (4.5), т.к. это означает выполнение требований $\Gamma^3_{21}=\Gamma^4_{21}=0$, которые не следуют из имеющегося условия.

Т е о р е м а 8. Сеть, имеющая прямые псевдофокусов, параллельные между собой, не может содержать куспидальных линий.

Действительно, по теореме 5 достаточно потребовать параллельность Φ_1 и I- й поляры. Согласно равенствам (2.2), уравнение Φ_1 может быть приведено к виду

$$x_\alpha(\bar{\bar{\omega}}^1\bar{\omega}^\alpha_2 - \bar{\bar{\omega}}^2\bar{\omega}^\alpha_1) + (\bar{\omega}^1\bar{\bar{\omega}}^2 - \bar{\omega}^2\bar{\bar{\omega}}^1) = 0.$$

Параллельность этой прямой и прямой (3.2) равносильна существованию $\rho \neq 0$, для которого справедливо

$$\bar{\bar{\omega}}^1\bar{\omega}^\alpha_2 - \bar{\bar{\omega}}^2\bar{\omega}^\alpha_1 = \rho H^\alpha$$

Так как H^3 и H^4 не равны нулю одновременно (распределение неминимально), то для существования ненулевого решения $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ этой системы уравнений необходимо выполнение условия

$$\bar{\omega}^3_2\bar{\omega}^4_1 - \bar{\omega}^3_1\bar{\omega}^4_2 \neq 0.$$

Это условие в сравнении с уравнением (4.4) куспидальных линий доказывает нужное утверждение.

С л е д с т в и е. Сеть, имеющая прямые псевдофокусов, параллельные между собой, не может содержать линии кривизны 2-го рода распределения.

Случай совпадения прямых псевдофокусов Φ_1 и Φ_2 определяется условиями

$$2\Gamma^\alpha_{21}k_1k_2 + (\Gamma^\alpha_{22}-\Gamma^\alpha_{11})(k_1+k_2) - 2\Gamma^\alpha_{12} = 0. \qquad (4.6)$$

Согласно теореме 4, совпавшие прямые Φ_1 и Φ_2 должны совпасть с I- й полярой распределения. Исключим из последней системы уравнений, например, k_2 и получим уравнение сети, прямые псевдофокусов которой совпадают

$$\Gamma^{[3}_{21}(\Gamma^{4]}_{22}-\Gamma^{4]}_{11})k^2 - 2\Gamma^{[3}_{12}\Gamma^{4]}_{21}k + \Gamma^{[3}_{12}(\Gamma^{4]}_{22}-\Gamma^{4]}_{11}) = 0. \qquad (4.7)$$

При выполнении условий интегрируемости (I.5) последнее уравнение приводится к виду

$$\Gamma^{[3}_{12}(\Gamma^{4]}_{22}-\Gamma^{4]}_{11})(k^2+1) = 0. \qquad (4.8)$$

Обращение в ноль первого сомножителя является условием распадения фокусной кривой. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 9. Любая сеть двумерной неминимальной поверхности в E_4 в точках, где фокусная кривая распадается, имеет прямые псевдофокусов, совпавшие между собой. В точках, где фокусная кривая не распадается, таких сетей нет.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Лит. мат. сб. 1966. Т.4. № 4. С.475-491.

2. Г л о в а Н.И. К проективной дифференциальной геометрии двумерного распределения в четырехмерном пространстве // Укр. геометр. сб. 1978. Вып.21. С.21-30.

3. Г л о в а Н.И. К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 // Укр. геометр. сб. 1975. Вып.18. С.37-48.

4. Г л о в а Н.И. К теории кривизны двумерного распределения четырехмерного евклидова пространства // Укр. геометр. сб. 1981. Вып.26. С.30-40.

5. Г л о в а Н.И., У с у б а л и е в а А.С. К теории кривизны оснащенных распределений Δ_2 в E_4 // Укр. геометр. сб. 1988. Вып.31. С.26-36.

УДК 514.75

О ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА $V_p \subset E_{p+2}$

В.А.Е с и н

(Белгородский педагогический институт)

В работе рассматриваются гиперраспределения на поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, инвариантно связанные с полем вектора данной нормали. Находятся условия интегрируемости этих распределений.

Поверхность $V_p \subset E_{p+2}$ отнесем к подвижному реперу

$$R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha), \quad i,j,k = 1,\dots,p; \quad \alpha,\beta = p+1, p+2,$$

где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \qquad (1)$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \qquad (2)$$

где b_{ij}^α - второй основной тензор поверхности. Функции $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ - компоненты метрического тензора поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, γ^{ij} - контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k, \quad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i. \qquad (3)$$

Тождества $\vec{e}_i \vec{e}_\alpha = 0$, $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводят к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0.$$

Пусть на $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов $\vec{n}$. Орт $\vec{e}_{p+2}$ репера направим по вектору $\vec{n}$ (в дальнейшем считаем, что $\vec{n} \parallel \vec{e}_{p+2}$). Тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i, \qquad (4)$$

а величины b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2} будут координатами двухвалентных тензоров.

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\widetilde{V}_p$ поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта $\vec{e}_{p+2}$ данной нормали. Имеем

$$d\vec{e}_{p+2} = \omega_{p+2}^i \vec{e}_i + \omega_{p+2}^{p+1} \vec{e}_{p+1} = (-\gamma^{ij} b_{jk}^{p+2} \vec{e}_i - c_k \vec{e}_{p+1})\omega^k = \vec{a}_k \omega^k,$$

где $\vec{a}_k$ - векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\widetilde{V}_p$.

В нормальной плоскости $\widetilde{N}_2$ к гиперсферическому изображению V_p инвариантно определены два вектора $\vec{a}_{p+2} = \vec{e}_{p+2}$ и $\vec{a}_{p+1} = c_i b_{p+2}^{ij} \vec{e}_j - \vec{e}_{p+1}$. Вектор $\vec{a}_{p+1}$ принадлежит касательному пространству к гиперсфере $S_{p+1} \supset \widetilde{V}_p$. Здесь $b_{p+2}^{ij} b_{jk}^{p+2} = \delta_k^i$ и предполагается, что $\det \| b_{ij}^{p+2} \| \neq 0$.

Пусть

$$\vec{q} = \text{Пр}_{T_x} \vec{a}_{p+1} = c_i b_{p+2}^{ij} \vec{e}_j.$$

Рассмотрим векторы Родрига [2] для направления $\vec{q}$ и ортов $\vec{e}_{p+1}$ и $\vec{e}_{p+2}$:

$$\vec{f} = \vec{\tau}_q^{p+1} = \gamma^{ik} b_{kj}^{p+1} c_t b_{p+2}^{tj} \vec{e}_i,$$

$$\vec{p} = \vec{\tau}_q^{p+2} = \gamma^{ik} b_{kj}^{p+2} c_t b_{p+2}^{tj} \vec{e}_i = c^i \vec{e}_i$$

Обозначим $\Delta_{p-1}^q(x), \Delta_{p-1}^f(x), \Delta_{p-1}^p(x)$ - площадки, ортогональные к $\vec{q}, \vec{f}, \vec{p}$ соответственно. Таким образом, на поверхности $V_p \subset E_{p+2}$