справедливо равенство $\mu=1$.

П р е д л о ж е н и е 3. Единичная точка E_4 луча $[A_2 A$
конгруэнции $\widetilde{V}_2$ является четвертой гармонической точкой с фо
кусом P_2 относительно точек A_2 и A_3 .

Назовем конгруэнцией $\widetilde{V}_2^{\circ}$ конгруэнцию $\widetilde{V}_2$, для которой $\lambda=-1$.

П р е д л о ж е н и е 4. Единичная точка E_3 луча $[A_1 A$
конгруэнции $\widetilde{V}_2^{\circ}$ является четвертой гармонической точкой с фо
кусом G_2 относительно точек A_1 и A_3 .

Конгруэнцию $\widetilde{V}$, для которой справедливы соотношения $\lambda=-1,\ a_1=-\frac{1}{2},\ b_1=\frac{1}{2},\ \mu=1$, назовем конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы фокусы луча прямолиней
ной конгруэнции $[A_1 A_2]$ гармонически делили точки A_1 и A_2 , а единичные точки E_2, E_3, E_4 были четвертыми гармоническими точками в соотношениях (II)-(I3), необходимо и достаточно, чтобы данная конгруэнция была конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются следующи
равенства:

$$\begin{cases} (R_1 R_2; A_1 A_2)=-1, & (G_2 E_3;\ A_1 A_3)=-1, \\ (\Phi_2 E_2; A_0 A_3)=-1, & (P_2 E_4;\ A_2 A_3)=-1 . \end{cases} \qquad (I9)$$

Учитывая (II)-(I3) и (I9), приходим к системе

$$\mu=1, \quad \lambda=-1, \quad a_1=-\frac{1}{2}, \quad b_1=\frac{1}{2}, \qquad (20)$$

т.е. данная конгруэнция является конгруэнцией $\widetilde{V}^{\circ}$. Обратно, пусть дана конгруэнция $\widetilde{V}^{\circ}$, т.е. выполняется (20). Следовательно, имеет место система (I9). Теорема доказана.

Назовем конгруэнцию $\widetilde{V}$, для которой

$$a_1=1, \ b_1=1, \ \lambda=1, \ \mu=2, \qquad (2I)$$

конгруэнцией $\widetilde{V}'$.

Т е о р е м а 5. Прямолинейная конгруэнция $[A_1 A_2]$ явля
ется гармонической, а прямолинейные конгруэнции $[A_0 A_3], [A_1 A_3]$
$[A_2 A_3]$ сопряжены поверхности (A_0) тогда и только тогда, ког
данная конгруэнция является конгруэнцией $\widetilde{V}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейных конгру
энций определяются следующими уравнениями:

$$a_1(\omega^2)^2+\omega^1\omega^2(b_1-\lambda a_1)-\lambda b_1(\omega^1)^2=0,$$

$$\begin{aligned} & a_1(\omega^2)^2+\omega^1\omega^2(b_1-\lambda a_1)-\lambda b_1(\omega^1)^2=0, \\ & b_1^2(\omega^1)^2+\omega^1\omega^2(2a_1 b_1-\mu b_1)+(a_1^2-\mu a_1)(\omega^2)^2=0, \\ & (\lambda^2 b_1^2-\mu b_1)(\omega^1)^2+\omega^1\omega^2(2\lambda^2 a_1 b_1-\mu a_1)+\lambda^2 a_1^2(\omega^2)^2=0 . \end{aligned} \qquad (22)$$

Пусть каждое из уравнений системы (22) имеет вид

$$(\omega^2)^2-(\omega^1)^2=0, \qquad (23)$$

тогда получим равенства (2I), т.е. данная конгруэнция является конгруэнцией $\widetilde{V}'$. Обратно, подставляя в систему (22) значения коэффициентов из (2I), получаем, что торсы конгруэнции $\widetilde{V}'$ задаются уравнением (23). Они высекают на поверхности (A_0) сопряженную сеть линий.

Библиографический список

I. Г у с е в а О.О. Прямолинейные конгруэнции с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I993. Вып.24. С.46-48.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Учебн. пособие. Калининград, I986. 72 с.

УДК 5I4.75

К ГЕОМЕТРИИ ПАРАБОЛ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А.Ж а р и к о в а

(Калининградский технический институт)

В трехмерном аффинном пространстве изучаются геометрические свойства конгруэнции $\widetilde{\pi}$ парабол [I] и ассоциированных с ней геометрических образов. Найдено безынтегральное представление конгруэнции $\widetilde{\pi}$.

I. Многообразие $\widetilde{\pi}$ рассматривается в частично-канонизированном репере $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, где A – точка пересечения с параболой ее диаметра $\mathcal{D}_1$ – является характеристической точкой плоскости P образующего элемента конгруэнции $\widetilde{\pi}$ и асимптотические линии поверхности (A) – координатные. Вектор $\vec{e}_1$ направляющий вектор касательной к параболе в точке A , векто $\vec{e}_3$ – направляющий вектор аффинной нормали поверхности (A) .

В выбранном репере уравнение образующего элемента и система уравнений Пфаффа конгруэнции $\tilde{\pi}$ запишутся соответственно в виде:

$$a_{11}(x^1)^2 - x^2 = 0, \quad x^3 = 0; \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{cases} d a_{11} - a_{11}(2\omega_1^1 - \omega_2^2) = a_{11}^1 \omega_1 + a_{11}^2 \omega_2, \ \omega_1^2 = -a_1^2 \omega_2, \\ \omega_2^1 = N^{11}\omega_1, \ \omega_3^1 = N^{121}\omega_1 - a_1^{11}\omega_1, \ \omega_3^2 = -a_1^{11}\omega_1 - a_1^{12}\omega_2, \\ \omega^1 = M^{12}\omega_2, \ \omega^2 = M^{12}\omega_1, \ \omega^3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\widetilde{C}$ называется конгруэнция параболических цилиндров с образующими, параллельными вектору $\vec{e}_3$ и с направляющей – параболой конгруэнции $\tilde{\pi}$.

Т е о р е м а. Если тензор кривизны связности Γ [1] равен нулю и точка A является пятикратной фокальной точкой конгруэнции $\tilde{\pi}$, то одна из фокальных точек конгруэнции $\widetilde{C}$ со впадает с центром квадрики Ли поверхности (A) , а остальные три сливаются в одну.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [1] было показано, что с конгруэнцией $\tilde{\pi}$ ассоциируется главное расслоение $G_6(\tilde{\pi})$, базо которого является конгруэнция $\tilde{\pi}$, типовым слоем – подгруппа стационарности фигуры $\Phi = \{A, \mathcal{D}_1, P\}$. Присоединение к каждой фигуре Φ прямой K_1 с направляющим вектором $\vec{e}_3$ и плоскости K_2, определенной векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, позволяет задать связность Γ в ассоциированном расслоении $G_6(\tilde{\pi})$. Если тензор кривизны этой связности равен нулю, то

$$2a_1^2 N^{11} + N^{122} = 0, \ a_1^2 N^{121} = 0, \ a_1^{12} N^{11} = 0, \ a_1^{11} - a_1^2 N^{11} = 0. \qquad (3)$$

Система уравнений для определения фокальных точек конгруэнции $\tilde{\pi}$ имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}(x^1)^2 - x^2 = 0, \ x^3 = 0, \\ d\,(a_{11}(x^1)^2 - x^2) = 0, \ dx^3 = 0 \end{cases}$$

или

$$2(a_{11})^3 N^{11}(x^1)^5 - a_{11} a_{11}^1 (x^1)^4 + a_{11}^2 (x^1)^3 + (3a_{11}M^{12} + a_1^2)(x^1)^2 = 0.$$

Тогда условия пятикратности фокальной точки A конгруэнции $\tilde{\pi}$ запишутся в виде:

$$a_{11}^1 = a_{11}^2 = 3a_{11}M^{12} + a_1^2 = 0, \qquad (4)$$

а фокальные точки конгруэнции $\widehat{C}$ определятся с учетом условий

(3) и (4) из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}(x^1)^2 - x^2 = 0, \\ F_1 \equiv 2a_{11} N^{11} x^1 x^2 + a_1^{11} x^3 - M^{12} = 0, \\ F_2 \equiv 2a_{11} a_1^{11} x^1 x^3 + a_{11} M^{12} x^1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим два решения:

I) $x^1 = 0, \ x^2 = 0, \ x^3 = \dfrac{M^{12}}{a_1^{11}}$;

2) $(x^1)^3 = \dfrac{3M^{12}}{4a_{11}N^{11}}, \quad x^2 = a_{11}(x^1)^2, \ x^3 = -\dfrac{M^{12}}{2a_1^{11}},$

где первое решение определяет координаты центра квадрики Ли поверхности (A) , т.к. уравнение квадрики Ли:

$$a_1^{11}(x^3)^2 + 2(x^1x^2 - M^{12}x^3) = 0.$$

2. Найденные геометрические свойства [1] конгруэнции $\tilde{\pi}$ позволяют построить ее безынтегральное представление. Для этого проведем следующие построения: рассмотрим произвольную поверхность (M) , на ней асимптотическую сеть линий. Вектор $\vec{e}_1$ направим по касательной к одной из линий семейства, вектор $\vec{e}_2$ – по касательной к другой линии семейства, вектор $\vec{e}_3$ – по направляющему вектору аффинной нормали поверхности (M) . Рассмотрим комплекс парабол, касающихся линий одного семейства сопряженной сети и имеющих диаметрами касательные к линии другого семейства. Зададим произвольную аналитическую функцию $z = z(u,v)$, выделяющую из пучка парабол, присоединенных к точке $A(u,v)$ поверхности (M) , конкретную параболу. Полученная конгруэнция будет конгруэнцией $\tilde{\pi}$.

Библиографический список

I. Ж а р и к о в а Л.А. О некоторых геометрических свойствах конгруэнции парабол // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С. 30–33.