7. Р ы б н и к о в А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Матем. 1983. № 1. С.73-80.

8. В а г н е р В.В. Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии // Веблен О. и Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М., 1949. С.135-223.

9. Л у м и с т е Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

10. Р ы б н и к о в А.К. Соприкасающиеся пространства и связности. I // Вестник МГУ. Мат., мех. 1979. № 6. С.44-48.

11. Р ы б н и к о в А.К. Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т.29. № 2. С.279-290.

12. З у л а н к е Р., В и н т г е н П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975. 348 с.

13. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференц. геом. многообр. фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.115-120.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С СЕМИКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

Получены аналитические характеристики конгруэнции линейчатых невырожденных квадрик в P_3 с семикратной фокальной поверхностью и исследован один класс таких конгруэнций - конгруэнции K_7^0. Доказано, что конгруэнции K_7^0 существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию линейчатых невырожденных квадрик, имеющую только две фокальные поверхности - семикратную невырожденную поверхность (A_0) и однократную - (A_3), причем прямая A_0A_3 не является прямолинейной образующей квадрики Q конгруэнции. Назовем

такие конгруэнции - конгруэнциями K_7. Отнесем конгруэнцию K_7 к реперу $\{\bar{A}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3)$, где A_1 и A_2 - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q \in K_7$, проходящих через фокальные точки A_0 и A_3. При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции K_7 запишутся соответственно в виде:

$$\mathcal{F} \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j\omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^i = b_k^i\omega^k, \quad \Omega = h_k\omega^k, \end{cases} \tag{1.2}$$

причем

$$\omega^i \stackrel{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \stackrel{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3;$$

$$c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1\lambda_{12} - b_2^2\lambda_{21} + b_1^2\lambda_{22} - b_2^1\lambda_{11} = 0, \tag{1.3}$$

$i,j,k = 1,2$; $i \neq j$, и по индексам i и j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Условия семикратности фокальной поверхности (A_0) приводятся к виду:

$$\begin{cases} cp_i = 0, \quad c(t_j - s_j) + q_i^2 - p_i(q_j + r_j) = 0, \\ c(v_i + w_i) + p_i(s_i + t_i) + 2q_i(u_i - a) + (s_j - t_j)(q_j + r_j) = 0, \\ -\lambda c + (u_i - a)^2 + 2v_jq_i + (s_i + t_i)(t_j - s_j) - \\ -(v_i + w_i)(r_j + q_j) - p_i\ell_i = 0, \\ \lambda(r_j + q_j) + 2v_j(u_i - a) + \ell_i(s_j - t_j) + (v_i + w_i)(s_i + t_i) = 0, \\ v_j^2 - \lambda(t_i + s_i) - \ell_i(v_i + w_i) = 0; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\lambda\ell_i \neq 0, \tag{1.5}$$

где величины $c, \lambda, p_i, q_i, r_i, \ell_i, v_i, w_i, s_i, t_i$ определены формулами (1.3) работы [1] и

$$a = a_{11}^2a_{22}^1 - a_{12}^2a_{21}^1, \quad u_i = c_{ij}\lambda_{ji} - c_{ii}\lambda_{jj} \tag{1.6}$$

2. Обозначим

$$\begin{cases} \theta = \omega^1 + \omega^2, \quad \theta_1 = \omega^2 - 2\omega^1, \quad \theta_2 = 2\omega^2 - \omega^1, \\ m = b_2^2 - b_1^1 + \ell_2^1 - b_1^2. \end{cases} \tag{2.1}$$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнциями K_7^0 называются конгруэнции K_7, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} a_{11}^2 = a_{22}^1 = a_{12}^2 = a_{21}^1 = -\frac{1}{2}h, \quad h_1 = h_2 = h, \quad \lambda_{11} = -2p, \\ \lambda_{12} = p, \quad \lambda_{22} = 2p, \quad \lambda_{21} = -p, \quad c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Т е о р е м а I. Конгруэнции $\mathcal{K}_7^\circ$ существуют и определяются с произволом пяти функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (2.2) в уравнениях (I.2), приводим замкнутую систему уравнений конгруэнции $\mathcal{K}_7^\circ$ к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_1^2 = \omega_1^2, \ \omega_i^3 = \omega^j, \ 2\omega_1^2 + h\theta = 0, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = p\,\theta_i, \ \Omega + 2\omega_1^2 = 0, \ \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = q\theta, \ \frac{1}{2} d\ln p + \omega_0^0 - q(\omega^2 - \omega^1) + (1 - \frac{m}{3p})\omega_1^2 = 0; \end{cases} \tag{2.3}$$

$$b_1^1 + b_2^2 + 2b_2^1 + 2b_1^2 = 0; \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \Delta h \wedge \theta + (hq - 4p)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad \Delta q \wedge \theta + (q^2 + 2b_1^1 + 2b_2^2) \times \\ \times \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \ \Delta b_k^i \wedge \omega^k + (q b_j^i + \frac{1}{2} hm)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ \Delta q \wedge (\omega^2 - \omega^1) - \frac{1}{3p}(\Delta b_2^2 - \Delta b_1^1 + \Delta b_2^1 - \Delta b_1^2) \wedge \omega_1^2 + \\ \quad + \frac{1}{3}(b_1^1 - b_2^2 + 2b_2^1 - 2b_1^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{cases} \Delta h = dh + h\omega_0^0, \quad \Delta q = dq + q\omega_0^0, \\ \Delta b_k^i = db_k^i + b_k^i(\omega_0^0 - \omega_3^3). \end{cases} \tag{2.6}$$

Из (2.3), (2.6) следует:

$$\Delta b_1^1 + \Delta b_2^2 + 2\Delta b_2^1 + 2\Delta b_1^2 = 0. \tag{2.7}$$

Все конечные соотношения (I.4) удовлетворены в силу (2.2), а неравенство (I.5) принимает вид

$$ph \neq 0. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.7) в (2.3), убеждаемся в справедливости теоремы.

Фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{K}_7^\circ$ определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad x^3(x^1 + x^2) = 0, \\ h(x^1 + x^2)^2 - 2px^3(2x^1 + x^2) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что она действительно определяет только две фокальные точки: A_0 (семикратную) и A_3.

3. О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_{7,1}^\circ$ называется

конгруэнция $\mathcal{K}_7^\circ$, для которой

$$q = 0, \quad b_1^1 = b_2^1 = -b_1^2 = -b_2^2. \tag{3.I}$$

Обозначим:

$$b = b_1^1. \tag{3.2}$$

Из (2.4), (3.I) следует:

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^1 + \omega_3^2 = 0. \tag{3.3}$$

Замыкание этих уравнений тождественно удовлетворяется. В силу (3.I)

$$m = 0. \tag{3.4}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{K}_{7,1}^\circ$ состоит из уравнений (3.3) и уравнений

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_1^2 = \omega_2^1, \quad \omega_i^3 = \omega^j, \ 2\omega_1^2 + h\theta = 0, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = p\theta_i, \ \Omega + 2\omega_1^2 = 0, \ \omega_3^1 = b\theta, \ d\ln p + 2\omega_0^0 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Замыкая последнее уравнение, находим:

$$p = b. \tag{3.6}$$

Учитывая (3.6) в (3.5), убеждаемся, что замыкание системы состоит из одного уравнения:

$$\Delta h \wedge \theta = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, конгруэнции $\mathcal{K}_{7,1}^\circ$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Пусть $\bar{E} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ – единичная точка прямой A_1A_2.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{K}_{7,1}^\circ$ обладают следующими свойствами: I) фокальная поверхность (A_3) вырождается в линию, касательная к которой вместе с прямой A_3E гармонически делит прямолинейные образующие A_3A_1 и A_3A_2; 2) прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) – параболическая, фокусы луча A_0A_3 гармонически делят точки A_0 и A_3; 3) прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) гармонична поверхности (A_0), фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Обозначим

$$\bar{E}^* = \bar{A}_1 - \bar{A}_2 \tag{3.8}$$

Тогда

$$d\bar{A}_3 = \omega_3^3 \bar{A}_3 + \omega_3^1 \bar{E}^*. \tag{3.9}$$

Следовательно, прямая A_3E^* является касательной к линии (A_3).

Кроме того,

$$(A_1 A_2 ; E E^*) = -1 . \qquad (3.10)$$

2) Торсы прямолинейной конгруэнции $(A_0 A_3)$ определяются уравнением:

$$(\omega^1 + \omega^2)^2 = 0 . \qquad (3.11)$$

Пусть

$$\bar{\mathcal{F}} = t^1 \bar{A}_0 + t^2 \bar{A}_3 \qquad (3.12)$$

– фокус луча $A_0 A_3$. Тогда

$$(t^1)^2 + \rho^2 (t^2) = 0 . \qquad (3.13)$$

Следовательно,

$$(A_0 A_3 ; \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2) = -1 . \qquad (3.14)$$

3) Для прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ доказательство аналогично.

Библиографический список

1. Шмелева С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с двумя трехкратными фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1994. Вып.25. С.121-125.

УДК 514.75

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЦЕНТРОВ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П.Юрова

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q . На гиперповерхности C центров гиперквадрик этого многообразия построены и геометрически охарактеризованы порожденные им четыре векторных поля. Доказан ряд предложений о взаимосвязях между ними.

Данная статья является продолжением работ [1], [2], при этом используются обозначения и результаты последних. Индексы принимают следующие значения; $\alpha, \rho, \gamma = \overline{1,n}$; $i, j, k = \overline{1, n-1}$.

В работе [2] построены и геометрически охарактеризованы два поля инвариантных нормалей II рода b и β гиперповерхности C центров гиперквадрик $Q \in V_{n-1}$. В используемом в [2] репере указанные нормали задаются соответственно системами:

$$x^n = 0 , \quad b_i x^i = 2, \qquad (1)$$

$$x^n = 0 , \quad \beta_i x^i = 2, \qquad (2)$$

где

$$b_i = a^{pq} b_{pqi} , \quad \beta_i = b_i + a^{nn} b_{nni} \qquad (3)$$

Пусть касательные к гиперповерхности C векторы $\bar\xi$ и $\bar\eta$ имеют своим началом центр P гиперквадрики Q , а концами соответственно полюсы $(n-2)$-плоскостей (1) и (2) относительно квадратичного элемента $Q \cap T_Q$, рассматриваемого как гиперквадрика в касательной гиперплоскости T_Q гиперповерхности C в центре P гиперквадрики Q . Для $\bar\xi = \{\xi^i\}$ и $\bar\eta = \{\eta^i\}$ получаем:

$$\xi^i = \frac{1}{2} a^{ij} a^{pq} b_{pqj} , \quad \eta^i = \frac{1}{2} a^{ij} (a^{pq} b_{pqj} + a^{nn} b_{nnj}) . \qquad (4)$$

Обозначим вершины [2] гиперквадрики Q символом $S^{\pm}$, а поверхности, описываемые ими, символом $\sigma^{\pm}$. Числа $\dim \sigma^{\pm}$ являются арифметическими инвариантами многообразия V_{n-1} , и в общем случае $\dim \sigma^{\pm} = n-1$.

В нашем репере уравнение гиперповерхности C имеет вид: $\omega^n = 0$, откуда вытекает: $\omega^n_i = c_{ij}\, \omega^j$. Для изучения гиперповерхностей $\sigma^{\pm}$ поместим конец вектора $\bar e_n$ репера в точку S^+ . При этом выполняется: $a_{in} \equiv 0$, $a_{nn} \equiv 1$. Система (1) дифференциальных уравнений работы [1] тогда приводит к уравнениям:

$$\omega^n_n = -\frac{1}{2} b_{nni}\, \omega^i , \quad \omega^i_n = V^i_j\, \omega^j , \qquad (5)$$

где

$$V^i_j = - a^{it} (c_{tj} + b_{tnj}) .$$

Пусть $d\bar P$ определяет направление $\omega^p \neq 0$, $\omega^i = 0$ ($i \neq p$). Из (5) вытекает, что касательная к $\sigma^{\pm}$ в точке $S^{\pm}$ прямая, соответствующая указанному направлению $d\bar P$ пересекает гиперплоскость $x^n = 0$ в точке $A^{\pm}_p = \{ {}^{\pm}x^i_{(p)} \}$, для которой

$$^{\pm}x^i_{(p)} = \frac{2}{b_{nnp}} \left(\delta^i_p \pm V^i_p \right) . \qquad (6)$$

Отсюда вытекает, что каждая касательная в $S^{\pm}$ гиперплоскость $T_{S^{\pm}}(\sigma^{\pm})$ к гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ пересекает касательную к C гиперплоскость T_Q по нормали II рода, которая определяется