УДК 514.76

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-2

О двух структурных тензорах acm-структуры

Доказано, что обращение в нуль пятого и шестого структурных тензоров (в терминологии Кириченко) произвольной почти контактной метрической структуры является условием, необходимым и достаточным для замкнутости контактной формы этой структуры.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, структурные уравнения Картана, структурные тензоры, контактная форма, структура Кириченко — Ускорева

1. Важными и содержательными примерами дифференциально-геометрических структур на многообразиях являются почти контактные метрические (almost contact metric, acm-) структуры. Такие структуры интенсивно изучались с середины прошлого века, причем за некоторыми важнейшими видами acm-структур закрепились названия структур Сасаки, Кенмоцу и Эндо — так отмечены заслуги этих выдающихся японских геометров. В XXI веке большой вклад в теорию acm-структур внесли и вносят математики из многих стран. Особенно выделим результаты американского специалиста Дэвида Блэра — основателя теории квазисасакиевых структур [1], а также отечественного геометра В.Ф. Кириченко, который вместе с некоторыми своими учениками получил значительные результаты в самых разных направлениях теории acm-структур — от геометрии упомянутых выше квазисасакиевых структур [2] до общей теории почти контактных метрических многообразий [3].

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

В данной статье рассматривается первая группа структурных уравнений Картана acm-структуры общего вида и исследуется вопрос о замкнутости контактной формы. Показано, что необходимым и достаточным условием замкнутости контактной формы произвольной acm-структуры является обращение в нуль ее пятого и шестого структурных тензоров.

2. Как известно (см.: [3]), *почти контактной метрической структурой* на ориентируемом многообразии N^{2n+1} нечетной размерности называют четверку тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, где через Φ обозначено поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика. Обычно векторное поле ξ называют характеристическим, η называют контактной формой, а Φ — структурным эндоморфизмом. При этом должны выполняться такие условия [3]:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0;$$
$$\Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),$$
$$X, Y \in \aleph(N^{2n+1}),$$

где $\aleph(N^{2n+1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n+1}.

Воспользуемся записанной в репере, адаптированном acm-структуре, первой группой структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G-структуры [3]:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \\ &\quad + B^a_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + B^c_{ab} \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + \\ &\quad + B^b_a \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b, \\ d\omega &= C_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + C^{bc} \omega_b \wedge \omega_c + C^b_c \omega^c \wedge \omega_b + \\ &\quad + C_b \omega \wedge \omega^b + C^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее через $\{\omega^{\alpha}\}$ и $\{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения ($\omega_{\alpha} = \omega^{\hat{a}}$, $\omega^{0} = \omega$); через $\{\omega_{j}^{k}\}$ — компоненты форм римановой связности; символ $[\cdot,\cdot]$ означает альтернирование;

$$k, j = 1, \dots, 2n;\ a, b, c = 1, \dots, n;\ \hat{a} = a + n.$$

Коэффициенты равенств (1) выражаются через компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма:

$$B_{c}^{ab} = -\frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},c}^{a};\ \ B^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a};\ \ B_{b}^{a} = i\,\Phi_{0,b}^{a};$$

$$B_{ab}^{c} = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}};\ \ B_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}};\ \ B_{a}^{b} = -i\,\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}};$$

$$B^{ab} = i\left(\Phi_{0,\hat{b}}^{a} - \frac{1}{2}\Phi_{\hat{b},0}^{a}\right);\quad B_{ab} = -i\left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}\right);$$

$$C_{b}^{a} = -i\left(\Phi_{\hat{a},b}^{0} + \Phi_{b,\hat{a}}^{0}\right);\quad C^{ab} = i\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^{0};\ \ C_{ab} = -i\Phi_{[a,b]}^{0};$$

$$C^{a} = -i\Phi_{\hat{a},0}^{0};\quad C_{a} = i\Phi_{a,0}^{0}.$$

Обычно равенства (1) называют *первой группой структурных уравнений Картана* acm-структуры. Их иногда более, иногда менее подробный вывод содержится в нескольких работах В. Ф. Кириченко и его учеников, связанных с почти контактными метрическими многообразиями; в частности, такие выкладки можно найти в статье [2] и в монографии [3].

Введем обозначения:

$$\mathrm{C}^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{a};\ \ \mathrm{C}_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}};$$

$$F^{ab} = i\,\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^{0};\ \ F_{ab} = -i\Phi_{a,b}^{0}.$$

Следующие системы функций определяют тензоры на многообразии N^{2n+1}:

1) $F = \{F_{j}^{k}\}$, где $F_{\hat{b}}^{a} = F^{ab}$, $F_{b}^{\hat{a}} = F_{ab}$, а все прочие компоненты семейства F нулевые;

2) $G = \{G^{j}\}$, где $G^{a} = C^{a}$, $G^{\hat{a}} = C_{a}$, $G^{0} = 0$.

В терминологии В. Ф. Кириченко [3] системы функций F и G — пятый и шестой структурные тензоры почти контактной метрической структуры соответственно.

Замкнутость контактной формы η выполнится тогда и только тогда, когда окажутся справедливыми равенства

$$\Phi^0_{[a,b]} = \Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]} = 0,$$

$$\Phi^0_{\hat{a},b} = \Phi^0_{a,\hat{b}} = 0, \ \Phi^0_{a,0} = \Phi^0_{\hat{a},0} = 0.$$

Следовательно,

$$C^{ab} = 0, \ C_{ab} = 0, \ C^a_b = 0, \ C^a = 0, \ C_a = 0.$$

Отсюда, среди прочего, получаем

$$F^{ab} = 0, \ F_{ab} = 0,$$

а пятый и шестой структурные тензоры рассматриваемой acm-структуры обращаются в нуль.

3. Обратим внимание на то, что замкнутость контактной формы acm-структуры связана с инвариантностью этой acm-структуры относительно так называемых канонических конформных преобразований. Впервые эту связь обнаружили и изучили В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев [4]. Более того, оказалось, что acm-структуры с замкнутой контактной формой обладают и многими другими интересными свойствами. Кроме того, эти структуры являются естественным обобщением таких важнейших почти контактных метрических структур, как косимплектическая структура и структура Кенмоцу. Наконец, отметим, что в последнее время такого типа acm-структуры изучались чаще всего под названием структур Кириченко — Ускорева (см., например, [5]).

Список литературы

1. *Blair D. E.* The theory of quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. Vol. 1. P. 331—345.

2. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, № 8. С. 71—100.

3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Кириченко В. Ф., Ускорев И. В.* Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2008. Т. 84, №6. С. 838—850.

5. *Банару М. Б., Банару Г. А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: *Банару М. Б.* О двух структурных тензорах acm-структуры // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 14—19. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-2.

MSC 2010: 53B25

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-2

On two structural tensors of an acm-structure

Submitted on March 26, 2024

Almost contact metric structures on odd-dimensional manifolds are considered. The first group of the Cartan structural equations of an arbitrary almost contact metric structure written in an A-frame (i. e., in a frame adapted to this almost contact metric structure) is studied. It is proved that the fifth and sixth Kirichenko structural tensors of the almost contact metric structure vanish if and only if the structural contact form is closed.

Keywords: almost contact metric structure, Cartan structural equations, structural tensors, contact form, Kirichenko — Uskorev structure

References

1. *Blair, D.E.:* The theory of quasi-Sasakian structures. J. Diff. Geom., 1, 331—345 (1967).

2. *Kirichenko, V.F.; Rustanov, A.R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. Sb. Math., **193**:8, 1173—1202 (2002).

3. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

4. *Kirichenko, V.F.; Uskorev, I.V.:* Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures. Math. Notes, **84**:6, 783—794 (2008).

5. *Banaru, M.B.; Banaru, G.A.:* On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds**.** Siberian Electronic Mathematical Reports, 17, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, M.B. On two structural tensors of an acm-structure. DGMF, 55 (1), 14—19 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-2.