Поверхность (К) тогда и только тогда вырождается в линию, когда векторы $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ коллинеарны, т. е. когда выполняется условие (11).

Библиографический список

1. Хляпова Е.А. О парах конгруэнций фигур, порождённых центральной коникой и точкой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1975. Вып.6. С.212-221.

E. A. Scherbak

ON CONGRUENCES OF EQUIPPED CONICS IN A_3 BELONGING TO A QUADRIC

Congruences P of equipped conics F = {F_1 , F_2 } are considered in a three-dimensional affine space, provided that a point F_2 describes a quadric Q, to which all conics F_1 of the congruence {F_1 } belong. Necessary and sufficient conditions are proved that the coordinate plane {A, e_1 , e_k } (k = 2, 3) is a tangent plane to a surface A of centers of a conic F_1 . Subclass P^1 of congruences P is isolated possesing interesting geometric properties.

УДК 514.75

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П. Юрова

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается (n-1)-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик. Введены и геометрически охарактеризованы четыре аффинные связности на V_{n-1}. Изучаются определяемые этими связностями поля векторов и ковекторов на гиперповерхности С центров гиперквадрик $Q \in V_{n-1}$.

Данная статья является продолжением работ [1]-[3]; при этом используются обозначения и результаты последних. Индексы принимают следующие значения: $\alpha,\ldots=\overline{1,n}\quad i,\ldots=\overline{1,n-1}$.

Если начало А репера R={A, e_i} помещено в центр гиперквадрики $Q \in V_{n-1}$, а векторы $\overline{e_i}$ лежат на гиперплоскости T_Q, касательной к гиперповерхности С центров гиперквадрик в точке А, то уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа многообразия V_{n-1} имеют соответственно вид

$$a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=1; \tag{1}$$

$$\nabla a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta i}\omega^{i}, \quad \omega^{n}=0, \tag{2}$$

где $\omega^{\alpha}, \omega_{\alpha}^{\beta}$ - компоненты деривационных формул репера, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства. Продолжив систему (2), получим

$$\nabla b_{\alpha\beta i}=b_{\alpha\beta ij}\omega^{j}, \quad \omega_{i}^{n}=c_{ij}\omega^{j} \tag{3}$$

При этом выполняется: $b_{[\alpha\beta]i}=0,\ b_{[\alpha\beta]ij}=0,\ c_{[ij]}=0.$

Проведем частичную канонизацию репера R, направив вектор $\overline{e_n}$ по сопряженному к гиперплоскости T_Q относительно гиперквадрики Q направлению. Тогда $a_{in}=0$, $a_{nn}\neq 0$, а из (2) вытекает

$$\omega_{n}^{k}=\Lambda_{p}^{k}\omega^{p}, \tag{4}$$

где

$$\Lambda_{p}^{k}=-a_{nn}a^{kt}c_{tp}-a^{kt}b_{tnp}. \tag{5}$$

Таким образом, многообразие V_{n-1} гиперквадрик Q определяет нормализацию гиперповерхности С: нормаль ν_Q в точке А проходит в направлении вектора $\overline{e_n}$. Уравнения (4) являются дифференциальными уравнениями поля нормали ν_Q. Определяемую нормализацией аффинную связность на гиперповерхности С [4, с. 242] обозначим ℵ. Для тензора a^{ij}, взаимного к a_{ij}, имеем:

$$\nabla a^{ij}=-a^{it}a^{js}b_{tsp}\omega^{p}.$$

Из (3) получаем

$$\nabla a_{ij}=b_{ijk}\omega^{k}, \quad \nabla b_{ijk}=B_{ijkp}\omega^{p}, \tag{6}$$

где

$$B_{ijkp}=b_{n(j|k|}c_{i)p}+b_{ijkp}.$$

Уравнения (6) определяют (n-1)-мерное многообразие квадратичных элементов $q=Q\cap T_Q$, задающих на гиперповерхности С инвариантную метрику g: $ds^2=a_{ij}\omega^{i}\omega^{j}$.

Наряду с соответствующей метрике g объектом связности Леви-Чивита Г:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} a^{kt} (b_{tji} + b_{tij} - b_{ijt}), \qquad \overset{o}{\nabla} \Gamma_{ij}^{k} = 0 \tag{7}$$

рассмотрим охватываемый фундаментальным объектом 1-го порядка $\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta i}\}$ многообразия V_{n-1} геометрический объект

$$\gamma^{i}_{jk} = a^{it} b_{tjk}, \qquad \nabla \gamma^{i}_{jk} = \gamma^{i}_{jkl} \omega^{l}. \tag{8}$$

Предложение 1. Объект $\left\{\gamma^{i}_{jk}\right\}$ определяет на поверхности C аффинную связность.

Доказательство. Действительно, для форм Пфаффа

$$\tilde{\omega}^{i} = \omega^{i}, \qquad \tilde{\omega}_{i}^{j} = \omega_{i}^{j} + \gamma^{j}_{ik} \omega^{k} \tag{9}$$

имеем:

$$\begin{cases} d\tilde{\omega}^{i} = \tilde{\omega}^{t} \wedge \tilde{\omega}_{t}^{i} + \dfrac{1}{2} S^{i}_{pq} \tilde{\omega}^{p} \wedge \tilde{\omega}^{q}, \\ d\tilde{\omega}^{i}_{j} = \tilde{\omega}^{t}_{j} \wedge \tilde{\omega}^{i}_{t} + \dfrac{1}{2} R^{i}_{pqj} \tilde{\omega}^{p} \wedge \tilde{\omega}^{q}, \end{cases} \qquad 10)$$

где $$\frac{1}{2} S^{i}_{pq} = -\gamma^{i}_{[pq]}, \quad \frac{1}{2} R^{i}_{pqj} = -\gamma^{i}_{j[pq]} - \gamma^{t}_{j[p} \gamma^{i}_{|t|q]} + c_{j[p} \lambda^{i}_{q]}. \tag{11}$$

Таким образом, формы $\tilde{\omega}^{i}$, $\tilde{\omega}^{i}_{j}$ удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности (10).

Обозначим введенную связность буквой γ.

Замечание. Одного многообразия квадратичных элементов не достаточно для задания связности γ, т. к. из (11) и (4) вытекает, что характеристики связности γ зависят также от поля нормалей ν_Q, которое определяется многообразием гиперквадрик Q. Пусть Π_Q: $A_n \to T_Q$ - оператор проектирования вдоль нормали ν_Q на гиперплоскости T_Q. Рассмотрим наряду с гиперквадрикой Q (1) любую гиперквадрику $Q^* \in V_{n-1}$, которая порождает квадратичный элемент $\Pi_Q(q^*) \subset T_Q$, где $q^* = Q^* \cap T_Q^*$. В [1] определено и геометрически охарактеризовано преобразование L пространства гиперквадрик в A_n. Рассматривая T_Q как пространство A_{n-1}, а квадратичные элементы q и $\Pi_Q(q^*)$ как гиперквадрики в нем, получаем геометрическую характеристику преобразования L_T пространства квадратичных элементов в T_Q, которое элементу $x^n = 0,\ \tilde{a}_{ij} x^i x^j + 2\tilde{a}_i x^i - 1 = 0$ ставит в соответствие элемент $x^n = 0,\ \tilde{a}_{ij} x^i x^j - 1 = 0$. Любая пара невырожденных центральных квадратичных элементов q, q′ ∈ T_Q порождает в T_Q аффинор

$_{q,q'} = \ _q \circ \ _{q'}$, где $_{q'} : p \to l$ и $_q : l \to p_1$ - поляритеты относительно элементов $L_T(q')$ и q соответственно, p, p_1 - точки, а *l-(n-2)* - плоскость в T_Q. Будем рассматривать $_{q,q'}$ как линейное преобразование пространства векторов, касательных к поверхности C в точке A. Так как элементы q, q′ определяются парой гиперквадрик Q, Q^* построенный аффинор будем также обозначать $_{Q,\,Q^*}$. Определенное на C биективное отображение μ: $M \in C \to Q \in V_{n-1}$, где M - центр гиперквадрики Q, задает многообразие V_{n-1}.

Предложение 2. Связность γ определяется аффинорами $_{Q,\,Q^*}$, а именно: если B=A+dA и Y - результат параллельного перенесения вектора *x* из A в B в связности γ, то Y= $_{Q,\,Q^*}(x)$, где $Q = \mu(A)$, $Q^* = \mu(B)$.

Доказательство. Учитывая, что многообразие V_{n-1} параметризовано точками гиперповерхности C, для координат элемента $L_T \circ \Pi_Q(q^*)$, где $q^*=Q^* \cap T_Q^*$, имеем

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + b_{ijk}\omega^k + \langle 2 \rangle$$

Отсюда для $_q \circ \ _{q'}$, где $q' = \Pi_Q(q^*)$, получаем

$$y^i = a^{it}(a_{tj} + b_{tjk}\omega^k + \langle 2 \rangle)x^j,$$

т. е. $y^i = (\delta^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k + \langle 2 \rangle)x^j$.

Преобразование, обратное к последнему имеет вид

$$y^i = (\delta^i_j - \gamma^i_{jk}\omega^k + \langle 2 \rangle)x^j,$$

что совпадает с результатом перенесения вектора $x=\{x^i\}$ в точку A+dA+$\langle 2 \rangle$ в связности γ.

В общем случае связность γ не симметрична. Она определяет единственную связность без кручения

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^k_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^k_{(ij)}, \tag{12}$$

имеющую с γ общие геодезические; обозначим ее символом $\overset{\circ}{\gamma}$. Объектом (12) определяется струя $\bar{\varphi}_A$ второго порядка с началом и концом в точке A:

$$y^i = x^i + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\gamma}{}^i_{jk}x^j x^k + \langle 3 \rangle, \quad x^n = 0. \tag{13}$$

Из (7) и (8) вытекает

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{\circ}{\gamma}{}^k_{ij} - \frac{1}{2} a^{kt} b_{ijt}. \qquad (14)$$

Введем системы величин

$$\Gamma_i = \Gamma^k_{ik}, \;\; \gamma_i = \overset{\circ}{\gamma}{}^k_{ik}, \;\; \mathrm{T}_i = \frac{1}{2} a^{kt} b_{ikt}, \;\; \overset{\circ}{\nabla}\Gamma_i = \overset{\circ}{\nabla}\gamma_i = \overset{\circ}{\nabla}\mathrm{T}_i = 0. \qquad (15)$$

Из (7), (8) и (15) получаем

$$\Gamma_i = 2\gamma_i - 2\Gamma_i, \quad \gamma_i = \frac{1}{2}(\beta_i + T_i), \qquad (16)$$

где $\beta_i = a^{pq} b_{pqi}$ - объект, определяющий нормаль 2-го рода β гиперповерхности C, которая геометрически охарактеризована в [1] и [2]. Геометрическая интерпретация объекта Γ_i хорошо известна [4, с.159]. Из (16) имеем: β_i=2 Γ_i. Для объекта γ_i справедливо

Предложение 3. Определяемая объектом γ_i нормаль 2-го рода гиперповерхности C

$$\gamma_i x^i = n, \quad x^n = 0, \qquad (17)$$

построенная для точки A, характеризуется тем, что она является прообразом несобственной гиперплоскости при локальной коллинеации Чеха [5] отображений $\varphi \in \overline{\varphi}_A$.

Предложение 4. Для определяемой ковектором T_i формы Пфаффа $\theta = \mathrm{T}_i - \omega^i$ выполняется:

$$\theta\,|_A = d\, ln(J^2 \cdot |\, a\,|^{-1}), \qquad (18)$$

где J - якобиан отображения $\varphi \in \overline{\varphi}_A$, $a = det[a_{ij}]$.

Доказательство. Равенство (18) вытекает из формул (11) [4, с.159] и (5, 7) [6, с.91].

Из (14), (16) получаем:

$$\tau_i = \mathrm{T}_i - g_i, \qquad (19)$$

где $\tau_i = \Gamma^t_{pq} a^{pq} a_{ti}$. Из (16) вытекает: $\tau_i = 3\gamma_i - 3q_i$ и, таким образом, интерпретация ковектора τ_i сводится к характеристикам γ_i и Γ_i.

Поднимая индексы у введенных ковекторов с помощью тензора a^{ij}, получим определяемые многообразием V_{n-1} следующие векторные поля на гиперповерхности C: β^i, Γ^i, γ^i, T^i, τ^i, причем как вытекает из приведенных выше соотношений в каждой точке все вектора лежат в двумерном подпространстве, натянутом на векторы β^i, Γ^i.

Библиографический список

1. Сопина Е.П. Об инвариантных образах, ассоциированных с конгрэнцией центральных невырожденных гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 83-86.

2. Юрова Е.П. Нормали второго рода гиперповерхности многообразия гиперквадрик // Там же, 1993. Вып. 24. С. 131-133.

3. Юрова Е.П. Векторные поля на гиперповерхности центров многообразия гиперквадрик // Там же, 1995. Вып. 26. С. 130-133.

4. Норден А.П. Пространства аффинной связности М.: Наука, 1976.

5. Чех Э. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами // Чехословац. мат. журн. 1952. V.2. №1. P. 91-107.

6. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65-107.

E. P. J u r o v a

AFFINE CONNECTIONS ON THE MANIFOLD OF CENTRAL HYPERQUADRICS

The (n-1)-dimensional manifold V_{n-1} of central nondegenerated hyperquadrics is considered in the n-dimensional affine space A_n . Four affine connections on V_{n-1} are introduced and their geometric interpretation is given . Fields of vectors and covectors on the hypersurface C of centers of hyperquadrics $Q \in V_{n-1}$ which are defined by these connections are also studied in the article.