Nonlinear Equations & Dynamical Systems. Needs'92 / ed V. Makhankov et al. Singapore: World Scientific, 1993. P.463-46(

7. Арнольд В.И. Математические методы классичес кой механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НЕИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Г.Иванов, А.К.Лапковский

(Могилевский государственный педагогический институт)

Дано конструктивное правило получения кривизн и вектор[ов] сопровождающего репера неизотропной гладкой кривой гипербол[и]ческого пространства ${}^mS_n$. Сделан предельный переход к псевдоевклидову пространству.

1°. Гиперболическое n-пространство ${}^mS_n$ индекса m $(0\le m$ ... трактуем [1, с.210] в виде гиперсферы радиуса $r=\sqrt{\varepsilon_0}\,\rho$ $(\varepsilon_0=\pm 1;$ ... псевдоевклидова $(n+1)$-пространства ${}^lR_{n+1}$ индекса l ($l=m$ - при $\varepsilon_0=+1$, $l=n+1-m$ при $\varepsilon_0=-1$) с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Рассмотрим в пространстве ${}^mS_n$ гладкую неизотропную кр[и]вую $\bar R=\bar R(s)$, отнесенную к натуральному параметру s :

$$\bar R^2=r^2=\varepsilon_0\rho^2,\quad \bar R'^2=\pm 1\quad (\bar R^{(i)}\equiv d^i\bar R/ds^i;\ i\in\overline{1,n}).$$

Пусть $\Delta_{i-1}\equiv\Gamma(\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(i-1)})\neq 0$ – определители Грама, составленн[ые] из указанных векторов. Пусть также

$$\bar A_\alpha=\begin{vmatrix}\bar R^2 & \bar R\bar R' & \dots & \bar R\bar R^{(\alpha)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \bar R^{(\alpha-1)}\bar R & \bar R^{(\alpha-1)}\bar R' & \dots & \bar R^{(\alpha-1)}\bar R^{(\alpha)}\\ \bar R & \bar R' & \dots & \bar R^{(\alpha)}\end{vmatrix}\quad(\alpha\in\overline{1,n-1}).\qquad(1)$$

Векторные и косые произведения векторов обозначим соответственно через $[.,\ .,\ \dots,\ .]$ и $\{.,\ .,\ \dots,\ .\}$.

Запишем формулы Френе кривой $\bar R=\bar R(s)$:

$$\frac{\bar R'}{\rho}=\bar E_0'=k_0\bar E_1,\ \bar E_\alpha'=-\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_\alpha k_{\alpha-1}\bar E_{\alpha-1}+k_\alpha\bar E_{\alpha+1},\ \bar E_n'=-\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n k_{n-1}\bar E_{n-1}.\qquad(2)$$

Здесь $(\bar R;\bar E_0,\ \bar E_i)$ – сопровождающий репер кривой; $\varepsilon_0 .\ \varepsilon_i=\pm1$ – ска[л]ярные квадраты базисных векторов; k_{i-1} – кривизны кривой.

Теорема. Вычислительные формулы для векторов сопровождающего репера и кривизн кривой $\bar R=\bar R(s)$ пространства ${}^mS_n$ имеют вид:

$$\bar E_0=\frac{\bar R}{\rho},\quad \bar E_\alpha=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_{\alpha-1}\bar A_\alpha}{\sqrt{|\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha|}},\quad \bar E_n=\frac{[\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n-1)}]}{\sqrt{|\Delta_{n-1}|}};\qquad(3)$$

$$\begin{cases}k_0=\dfrac{1}{\rho},\quad k_\beta=\dfrac{\sqrt{|\Delta_{\beta-1}\Delta_{\beta+1}|}}{|\Delta_\beta|}\quad(\beta\in\overline{1,n-2}),\\ k_{n-1}=(-1)^l\cdot\dfrac{\sqrt{|\Delta_{n-2}|}}{\Delta_{n-1}}\cdot\{\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n)}\}.\end{cases}\qquad(4)$$

Доказательство. В общем случае будем считать, что векторы $\bar R$ и $\bar R^{(\alpha)}$ линейно независимы. Применяя к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим векторы $\bar R$ и $\bar A_\alpha$ (см.(1)). Поскольку при этом $\bar R^2=\Delta_0$, $\bar A_\alpha^2=\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha$, то в качестве векторов сопровождающего репера можно взять векторы:

$$\begin{cases}\bar E_0=\dfrac{\bar R}{\rho},\quad \bar E_\alpha=\dfrac{\lambda_\alpha\bar A_\alpha}{\sqrt{|\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha|}},\quad \bar E_n=[\bar E_0,\bar E_1,\dots,\bar E_{n-1}]=\\ =\operatorname{sign}(\Delta_0\Delta_1\dots\Delta_{n-2})\cdot\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-1}\cdot\dfrac{[\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n-1)}]}{\sqrt{|\Delta_{n-1}|}},\end{cases}\qquad(5)$$

где $\lambda_\alpha=\pm1$ – неизвестные пока множители. Из формул Френе (2), равенств(5) и того, что

$$\bar E_0^2=\operatorname{sign}(\Delta_0),\quad \bar E_\alpha^2=\operatorname{sign}(\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha),\quad \bar E_n^2=(-1)^l\operatorname{sign}(\Delta_{n-1}),$$

следует:

$$k_0=\frac{\varepsilon_0\lambda_1}{\rho},\quad k_\beta=\varepsilon_\beta\lambda_\beta\lambda_{\beta+1}\cdot\frac{\sqrt{|\Delta_{\beta-1}\Delta_{\beta+1}|}}{|\Delta_\beta|},$$

$$k_{n-1}=(-1)^l\operatorname{sign}(\Delta_0\Delta_1\dots\Delta_{n-2})\cdot\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-2}\cdot\frac{\Delta_{n-2}}{\sqrt{\Delta_{n-2}}}\cdot\frac{\{\bar R,\bar R',\dots,\bar R^{(n)}\}}{\Delta_{n-1}}.$$

Требуя положительность первых $n-1$ из этих кривизн, получим искомые условия: $\lambda_\alpha=\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_{\alpha-1}$, откуда и вытекают равенства (3) и (4).

2°. Осуществляя предельный переход $\rho\to\infty$, придем от гиперболического пространства ${}^mS_n$ к псевдоевклидову пространству ${}^mR_n$ [1, с.262]. В нем рассматривается кривая $\bar r=\bar r(s)$, также отнесенная к натуральному параметру $(\bar r'^2=\pm1;\ \bar r^{(\alpha)}\equiv\dfrac{d^\alpha\bar r}{ds^\alpha})$. Положим:

$$d_\alpha=\Gamma(\bar r',\bar r'',\dots,\bar r^{(\alpha)})\neq 0,$$

$$\bar{a}_{\beta+1} = \begin{vmatrix} \bar{r}'^2 & \bar{r}'\bar{r}'' & \dots & \bar{r}'\bar{r}^{(\beta+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}' & \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}'' & \dots & \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}^{(\beta+1)} \\ \bar{r}' & \bar{r}'' & \dots & \bar{r}^{(\beta+1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Формулы Френе кривой $\bar{r}=\bar{r}(s)$ примут вид:

$$\bar{r}'=\bar{e}_1,\ \bar{e}_1'=k_1\bar{e}_2,\ \bar{e}_{\beta+1}'=-\varepsilon_\beta\,\varepsilon_{\beta+1}k_\beta\bar{e}_\beta+k_{\beta+1}\bar{e}_{\beta+2},$$
$$\bar{e}_n'=-\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n k_{n-1}\bar{e}_{n-1} \qquad (\varepsilon_i\equiv\bar{E}_i^2=\pm 1). \qquad (7)$$

Векторы сопровождающего репера запишутся в виде:

$$\bar{e}_1=\frac{\bar{r}'}{\sqrt{|d_1|}},\ \bar{e}_{\beta+1}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_\beta\,\bar{a}_{\beta+1}}{\sqrt{|d_\beta\, d_{\beta+1}|}},\ \bar{e}_n=\frac{[\bar{r}',\bar{r}'',\dots,\bar{r}^{(n-1)}]}{\sqrt{|d_{n-1}|}}. \qquad (8)$$

Кривизны кривой зададутся формулами:

$$k_\beta=\frac{\sqrt{|d_{\beta-1}\, d_{\beta+1}|}}{|d_\beta|}\ (\text{при } d_0\equiv 1),\ k_{n-1}=(-1)^m\cdot\frac{\sqrt{|d_{n-2}|}}{d_{n-1}}\{\bar{r}',\bar{r}'',\dots,\bar{r}^{(n)}\}. \qquad (9)$$

3°. П р и м е р ы.

I. Пространство Лобачевского ${}^1S_3$. Имеем (см. п.I): $n=$ $m=1,\ \ell=3,\ \varepsilon_0=-1,\ \bar{R}^2=1$. Формулы Френе (2) пространственноподоб ной кривой $\bar{R}=\bar{R}(s)$ запишутся в виде:

$$\frac{\bar{R}'}{\rho}=\bar{E}_0'=\frac{\bar{E}_1}{\rho},\ \bar{E}_1'=\frac{\bar{E}_0}{\rho}+k_1\bar{E}_2;\ \bar{E}_2'=-k_1\bar{E}_1+k_2\bar{E}_3,\ \bar{E}_3'=-k_2\bar{E}_2.$$

Векторы сопровождающего репера (3) и кривизны (4) будут име вид:

$$\bar{E}_0=\frac{\bar{R}}{\rho};\ \bar{E}_1=\bar{R}',\ \bar{E}_2=\frac{\frac{\bar{R}}{\rho^2}-\bar{R}''}{\sqrt{\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2}}},\ \bar{E}_3=-\frac{[\bar{R},\bar{R}',\bar{R}'']}{\rho\sqrt{\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2}}};$$

$$k_0=\frac{1}{\rho};\ k_1^2=\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2},\ \ k_1^2k_2=\frac{1}{\rho}\cdot\{\bar{R},\bar{R}',\bar{R}'',\bar{R}'''\}.$$

Осуществляя предельный переход $\rho\to\infty$, придем к класси ческим результатам для евклидова 3-пространства R_3 .

2. Пространство Минковского ${}^3R_4$. Имеем (см. п.2^0): $n=$ $m=3$. Формулы Френе (7) времениподобной кривой $\bar{r}=\bar{r}(s)$ ($\bar{r}'^2=$ примут вид:

$$\bar{r}'=\bar{e}_1,\ \bar{e}_1'=k_1\bar{e}_2,\ \bar{e}_2'=k_1\bar{e}_1+k_2\bar{e}_3,\ \bar{e}_3'=-k_2\bar{e}_2+k_3\bar{e}_4,\ \bar{e}_4'=-k_3\bar{e}_3.$$

Векторы сопровождающего репера (см.(6), (8)) запишутся сле дующим образом:

$$\bar{e}_1=\bar{r}',\ \bar{e}_2=\frac{\bar{r}''}{\sqrt{-d_2}},\ \bar{e}_3=\frac{1}{\sqrt{d_2d_3}}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \bar{r}''^2 \\ 0 & \bar{r}''^2 & \bar{r}''\bar{r}''' \\ \bar{r}' & \bar{r}'' & \bar{r}''' \end{vmatrix},$$

$$\bar{e}_4=\frac{[\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}''']}{\sqrt{-d_3}} \qquad \left(d_2=-\bar{r}''^2;\ d_3=-(\bar{r}''^2)^3-\bar{r}''^2\bar{r}'''^2+(\bar{r}''\bar{r}''')^2\right).$$

Вычислительные формулы (9) кривизн кривой:

$$k_1^2=\bar{r}''^2,\ k_2^2=k_1^2+\frac{\bar{r}'''^2}{k_1^2}-\frac{(\bar{r}''\bar{r}''')^2}{k_1^4},\ \ k_1^3k_2^2k_3=\{\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}''',\bar{r}^{IV}\}.$$

Таким образом, получаем полное согласие с известными результатами [2], [3].

Библиографический список

I. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.

2. Ф р а н к Х. Построение дифференциальной геометрии в пространстве Лобачевского методом внешних форм // Сибирск матем. ж. 1961. Т.II. № 4. С.600-622.

3. Т у т а е в Л.К. К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского // Тр. I-ой респ. конф. матем. Белоруссии. Минск: Высш. школа, 1965. С.290-307.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕИЗОТРОПНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕВЫРОЖДЕННЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический университет)

В данной статье проводится одна из возможных классификаций m-мерных поверхностей V_m в $(n+1)$-мерном невырожденном неевклидовом пространстве ${}^\ell S_{n+1}$, которое представляет собой $(n+1)$-мерное проективное пространство, в котором задана инвариантная невырожденная гиперквадрика Q (абсолют). При этом рассматривается случай неизотропной m-поверхности V_m , когда ее текущая точка $V\notin Q$.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в