

(Калининградский государственный университет)

СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С помощью способа Лаптева исследуется групповая связность в расслоении, ассоциированном с многообразием центрированных плоскостей в проективном пространстве. Показано, что объект кривизны групповой связности в случае неголономного пространства параметров не является тензором, а в голономном случае – тензор, содержащий 4 подтензора. Произведено сильное аффинное оснащение многообразия, состоящее в задании полей плоскостей Картана и нормалей 2–го рода. Введено понятие ковариантного дифференциала и ковариантных производных оснащающего квазитензора относительно групповой связности. Совокупность последних образует тензор, содержащий 3 подтензора. Доказано, что сильное аффинное оснащение индуцирует 2 типа групповой связности в ассоциированном расслоении.

Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, J, K = \overline{1, n}$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega^J A_J + \omega_I A. \quad (1)$$

Структурные формы $\omega^I, \omega_I, \omega^J$ проективной группы $GP(n)$, удовлетворяют уравнениям Картана [1]

$$D\omega^I_K = \omega^J_K \wedge \omega^I_J + (\delta^I_K \omega_J + \delta^I_J \omega_K) \wedge \omega^J, \quad D\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I_K, \quad D\omega_I = \omega^K \wedge \omega_{IK}. \quad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим m -мерную центрированную плоскость L_m ($1 \leq m < n$). Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ ($a, b, c, \dots = \overline{1, m}; \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{m+1, n}$), помещая вершину A в центр плоскости L_m , а вершины A_a – на плоскость L_m . Из формул (1) следуют уравнения стационарности плоскости L_m : $\omega^a = 0, \omega^\alpha = 0, \omega_a^\alpha = 0$.

Система уравнений r -мерного многообразия V_r^* ($1 \leq r < m(n-m)+n$) центрированных плоскостей L_m в параметрической форме имеет вид:

$$\omega^a = \Lambda^a_i \theta^i, \quad \omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \theta^i, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \quad (3)$$

где формы Пфаффа θ^i , являющиеся структурными формами r -мерного гладкого многообразия V_r - пространства параметров, удовлетворяют уравнениям

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j \quad (i, j, k, \dots = \overline{1, r}). \quad (4)$$

Дифференцируя уравнения (4) внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана [2], получим

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge \theta^i_{jk}, \quad \theta^i_{jk} \wedge \theta^j \wedge \theta^k = 0.$$

Замечание 1. Для голономного гладкого многообразия V_r формы θ_{jk}^i симметричны по нижним индексам, а для неголономного гладкого многообразия [3] - несимметричны.

Продолжая систему уравнений (3), получим

$$\Delta\Lambda_i^a + \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \Delta\Lambda_i^\alpha \equiv 0, \quad \Delta\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_a \equiv 0, \quad (5)$$

где Δ - дифференциальный оператор, действующий по закону

$$\Delta\Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b - \Lambda_{bj}^\alpha \theta_i^j + \Lambda_{bi}^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

а символ \equiv означает сравнение по модулю базисных форм θ^i . Система функций $\Lambda = (\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha)$ является фундаментальным объектом 1-го порядка многообразия V_r^* .

Из уравнений (2) следует, что с многообразием V_r^* ассоциируется главное расслоение $G_{S^*}(V_r^*)$ со структурными уравнениями (4) и следующими:

$$\begin{aligned} D\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, & D\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + \theta^i \wedge \omega_{ai}, \\ D\omega_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \theta^i \wedge \omega_{\beta i}^\alpha, & D\omega_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^a \wedge \omega_a, \\ D\omega_\alpha^a &= \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \theta^i \wedge \omega_{\alpha i}^a, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{bi}^a &= \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a (\Lambda_i^\alpha \omega_\alpha + \Lambda_i^c \omega_c) - \Lambda_i^a \omega_b, & \omega_{ai} &= \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha, \\ \omega_{\beta i}^\alpha &= -\Lambda_{ai}^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha (\Lambda_i^\gamma \omega_\gamma + \Lambda_i^a \omega_a) - \Lambda_i^\alpha \omega_\beta, & \omega_{\alpha i}^a &= -\Lambda_i^a \omega_\alpha. \end{aligned}$$

Базой главного расслоения $G_{S^*}(V_r^*)$ является многообразие V_r^* , а типовым слоем - S^* -членная подгруппа стационарности $G_{S^*}(S^* = n(n+1) - m(n-m))$ плоскости L_m^* .

Групповую связность в главном расслоении $G_{S^*}(V_r^*)$ зададим с помощью форм [4]

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, & \tilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{ai} \theta^i, & \tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \\ \tilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i, & \tilde{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i} \theta^i. \end{aligned} \quad (7)$$

Компоненты объекта связности $\Gamma = \{ \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha i} \}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a &= \Gamma_{bij}^a \theta^j, & \Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} &= \Gamma_{aij} \theta^j, \\ \Delta\tilde{A}_{\alpha i}^a - \tilde{A}_{bi}^a \omega_\alpha^b + \tilde{A}_{\alpha i}^\beta \omega_\beta^a + \omega_{\alpha i}^a &= \tilde{A}_{\alpha ij}^a \theta^j, & \Delta\Gamma_{\beta i}^\alpha + \omega_{\beta i}^\alpha &\equiv \Gamma_{\beta ij}^\alpha \theta^j, \\ \Delta\tilde{A}_{\alpha i} + \tilde{A}_{\alpha i}^a \omega_a + \tilde{A}_{\alpha i}^\beta \omega_\beta - \tilde{A}_{\alpha i} \omega_\alpha &= \tilde{A}_{\alpha ij} \theta^j. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (6,8) получаем структурные уравнения для форм связности

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_b^a &= \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \\ D\tilde{\omega}_a &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \tilde{\omega}_b + R_{aij} \theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_\beta^\alpha &= \tilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\alpha + R_{\beta ij}^\alpha \theta^i \wedge \theta^j, \\ D\omega_\alpha^a &= \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + R_{\alpha ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \\ D\tilde{\omega}_\alpha &= \tilde{\omega}_\alpha^a \wedge \tilde{\omega}_a + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta + R_{\alpha ij} \theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned}$$

где компоненты объекта кривизны групповой связности $R = \{R_{bij}^a, R_{aij}, R_{\beta ij}^\alpha, R_{\alpha ij}^a, R_{\alpha ij}\}$ выражаются по формулам:

$$\begin{aligned} R_{bij}^a &= \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a, & R_{aij} &= \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{bj]}^a, \\ R_{\beta ij}^\alpha &= \Gamma_{\beta[ij]}^\alpha - \Gamma_{\beta[i}^\gamma \Gamma_{\gamma j]}^\alpha, & R_{\alpha ij}^a &= \Gamma_{\alpha[ij]}^a - \Gamma_{\alpha[i}^b \Gamma_{bj]}^a - \Gamma_{\alpha[i}^\beta \Gamma_{\beta j]}^a, \\ R_{\alpha ij} &= \Gamma_{\alpha[ij]} - \Gamma_{\alpha[i}^a \Gamma_{aj]} - \Gamma_{\alpha[i}^\beta \Gamma_{\beta j]}^a, \end{aligned} \quad (9)$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжая уравнения (8), получим

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma_{bij}^a - \Gamma_{bk}^a \theta_{ij}^k - \Gamma_{ci}^a \omega_{bj}^c + \Gamma_{bi}^c \omega_{cj}^a + \omega_{bij}^a &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{aij} - \Gamma_{ak} \theta_{ij}^k - \Gamma_{aij}^b \omega_b - \Gamma_{bi} \omega_{aj}^b + \Gamma_{ai}^b \omega_{bj} + \omega_{aij} &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\beta ij}^\alpha - \Gamma_{\beta k}^\alpha \theta_{ij}^k - \Gamma_{\gamma i}^\alpha \omega_{\beta j}^\gamma + \Gamma_{\beta i}^\gamma \omega_{\gamma j}^\alpha + \omega_{\beta ij}^\alpha &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha ij}^a - \Gamma_{\alpha k}^a \theta_{ij}^k - \Gamma_{bij}^a \omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha ij}^\beta \omega_\beta^a + \Gamma_{\alpha i}^b \omega_{bj}^a - \Gamma_{\beta i}^a \omega_{\alpha j}^\beta + \Gamma_{\alpha i}^\beta \omega_{\beta j}^a - \tilde{A}_{bi}^a \omega_{\alpha j}^b + \omega_{\alpha ij}^a &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha ij} - \Gamma_{\alpha k} \theta_{ij}^k - \Gamma_{aij} \omega_\alpha^a + \Gamma_{\alpha ij}^\beta \omega_\beta + \Gamma_{\alpha i}^a \omega_{aj} - \Gamma_{\beta i} \omega_{\alpha j}^\beta + \Gamma_{\alpha i}^a \omega_{\alpha j}^a - \tilde{A}_{\alpha i}^a \omega_{aj} &\equiv 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{bij}^a &= \Lambda_{bij}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a (\Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha + \Lambda_{ij}^c \omega_c + \Lambda_i^c \omega_{cj}) - \Lambda_{ij}^a \omega_b - \Lambda_i^a \omega_{bj} + \Lambda_{bi}^\alpha \omega_{\alpha j}^a, \\ \omega_{\beta ij}^\alpha &= -\Lambda_{aij}^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha (\Lambda_{ij}^\gamma \omega_\gamma + \Lambda_{ij}^a \omega_a + \Lambda_i^a \omega_{aj}) - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\beta - \Lambda_{ai}^\alpha \omega_{\beta j}^a, \\ \omega_{aij} &= \Lambda_{aij}^\alpha \omega_\alpha, \quad \omega_{\alpha ij}^a = -\Lambda_{ij}^a \omega_\alpha. \end{aligned}$$

Теперь согласно формулам (9) найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R групповой связности

$$\begin{aligned} \Delta R_{bij}^a + \Gamma_{bk}^a \theta_{[ij]}^k &\equiv 0, & \Delta R_{aij} + R_{aij}^b \omega_b + \Gamma_{ak} \theta_{[ij]}^k &\equiv 0, \\ \Delta R_{\beta ij}^\alpha + \Gamma_{\beta k}^\alpha \theta_{[ij]}^k &\equiv 0, & \Delta R_{\alpha ij}^a - R_{bij}^a \omega_\alpha^b + R_{\alpha ij}^\beta \omega_\beta^a + \Gamma_{\alpha k}^a \theta_{[ij]}^k &\equiv 0, \\ \Delta R_{\alpha ij} - R_{aij} \omega_\alpha^a + R_{\alpha ij}^\beta \omega_\beta + R_{\alpha ij}^a \omega_a + \Gamma_{\alpha k} \theta_{[ij]}^k &\equiv 0. \end{aligned}$$

Теорема 1. Если пространство параметров V_r не голономно, то объект кривизны R образует геометрический объект лишь вместе с объектом групповой связности Γ и фундаментальным объектом многообразия.

Теорема 2. Если пространство параметров V_r голономно, то объект кривизны R является тензором, содержащим 4 подтензора $R_{bij}^a, \{R_{bij}^a, R_{aij}\}, R_{\beta ij}^\alpha, \{R_{\alpha ij}^a, R_{bij}^a, R_{\beta ij}^\alpha\}$.

Осуществим сильное аффинное оснащение [5] многообразия V_r^* полями следующих геометрических образов : 1) $(n-m-1)$ -плоскости P_{n-m-1} , не имеющей об-

щих точек с плоскостью L_m^* ; 2) $(m-1)$ -плоскости P_{m-1} , принадлежащей плоскости L_m^* и не проходящей через ее центр A .

Оснащающие плоскости определим системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A, \quad B_a = A_a + \lambda_a A,$$

причем

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a \theta^i, \quad \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i} \theta^i, \quad \Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai} \theta^i. \quad (10)$$

Продолжая эти уравнения, найдем

$$\Delta\lambda_{\alpha i}^a - \lambda_\beta^a \omega_{\alpha i}^\beta + \lambda_\alpha^b \omega_{bi}^a + \omega_{\alpha i}^a \equiv 0, \quad \Delta\lambda_{ai} - \lambda_b \omega_{ai}^b + \omega_{ai} \equiv 0, \quad (11)$$

$$\Delta\lambda_{\alpha i} + \lambda_{\alpha i}^a \omega_a + \lambda_\alpha^a \omega_{ai} - \lambda_\beta \omega_{\alpha i}^\beta \equiv 0.$$

Внося формы связности в дифференциальные уравнения (10), получим

$$\nabla_i \lambda_\alpha^a = \nabla_i \lambda_\alpha^a \theta^i, \quad \nabla_i \lambda_\alpha = \nabla_i \lambda_\alpha \theta^i, \quad \nabla_i \lambda_a = \nabla_i \lambda_a \theta^i, \quad (12)$$

где левые части этих формул

$$\nabla_i \lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a - \lambda_\beta^a \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^b \omega_b^a + \lambda_\alpha \omega^a + \omega_\alpha^a,$$

$$\nabla_i \lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta \omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a \omega_a + \omega_\alpha, \quad \nabla_i \lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b \omega_a^b + \omega_a,$$

называются ковариантными дифференциалами компонент оснащающего квазитензора $\lambda = (\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda_a)$ относительно групповой связности Γ . В правые части (12) входят выражения

$$\nabla_i \lambda_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a + \lambda_\beta^a \Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^b \Gamma_{bi}^a - \Gamma_{\alpha i}^a, \quad \nabla_i \lambda_a = \lambda_{ai} + \lambda_b \Gamma_{ai}^b - \Gamma_{ai}, \quad (13)$$

$$\nabla_i \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta \Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^a \Gamma_{ai}^a - \Gamma_{\alpha i},$$

называемые ковариантными производными оснащающего квазитензора λ в связности Γ . Воспользовавшись формулами (8,10,11) найдем

$$\Delta\nabla_i \lambda_\alpha^a \equiv 0, \quad \Delta\nabla_i \lambda_\alpha + \nabla_i \lambda_\alpha^a \omega_a \equiv 0, \quad \Delta\nabla_i \lambda_a \equiv 0.$$

Теорема 3. Совокупность ковариантных производных $\{\nabla_i \lambda_\alpha^a, \nabla_i \lambda_\alpha, \nabla_i \lambda_a\}$ компонент оснащающего квазитензора λ образует тензор, содержащий 3 подтензора $\nabla_i \lambda_\alpha^a, \nabla_i \lambda_a, \{\nabla_i \lambda_\alpha^a, \nabla_i \lambda_\alpha\}$.

Фундаментальный тензор Λ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ двумя способами. В первом случае, рассмотрев соотношения (5, 8, 10), получим охват объекта связности

$\Gamma = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}^1, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha i}^1\}$ по формулам [6].

$$\begin{cases} \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_b^a \Lambda_i^\alpha \lambda_\alpha - M_i^c (\delta_b^a \lambda_c + \delta_c^a \lambda_b), \\ \Gamma_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha \lambda_\beta + \delta_\beta^\alpha (\Lambda_i^\gamma \lambda_\gamma^a \lambda_a - M_i) - \Lambda_i^\alpha \lambda_\beta, \end{cases} \quad (14)$$

$$\Gamma_{ai}^1 = \Lambda_{ai}^\alpha \lambda_\alpha - \lambda_a \lambda_b M_i^b, \quad \Gamma_{\alpha i}^a = -\mu_\alpha \Lambda_i^a - \lambda_\alpha^b \lambda_\beta^a (\Lambda_{bi}^\beta + \lambda_b \Lambda_i^\beta),$$

$$\Gamma_{\alpha i}^1 = \lambda_a \lambda_b \lambda_\alpha^b M_i^a - \lambda_\beta \lambda_\alpha^a \Lambda_{\alpha i}^\beta + \lambda_\alpha \lambda_a \lambda_\beta^a \Lambda_i^\beta - \lambda_\alpha M_i, \quad (15)$$

где $M_i^a = \Lambda_i^a - \Lambda_i^\alpha \lambda_\alpha^a$, $M_i = \Lambda_i^a \lambda_a + \Lambda_i^\alpha \lambda_\alpha$, $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_\alpha^a \lambda_a$.

Во втором случае, учитывая теорему 2 и полагая $\nabla_i \lambda_\alpha^a = 0$, $\nabla_i \lambda_\alpha = 0$, $\nabla_i \lambda_a = 0$ в формулах (13), находим второй охват $\Gamma^2 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}^2, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha i}^2\}$ по формулам (14) и следующим

$$\Gamma_{ai}^2 = \lambda_{ai} + \lambda_b \Gamma_{ai}^b, \quad \Gamma_{\alpha i}^2 = \lambda_{\alpha i}^a + \lambda_\beta \Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^b \Gamma_{bi}^a, \quad \Gamma_{\alpha i}^2 = \lambda_{\alpha i} + \lambda_\beta \Gamma_{\alpha i}^\beta - \lambda_\alpha^a \Gamma_{ai}^2.$$

Теорема 4. Сильное аффинное оснащение многообразия B_r^* индуцирует 2 типа групповой связности в ассоциированном расслоении $G_{S^*}(B_r^*)$ с объектами Γ^1 и Γ^2 .

Замечание 2. Формула (15) уточняет соответствующую формулу работы [6].

Библиографический список

1. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 224 с.
2. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНТИ. М., 1966. Т.1. С. 139-189.
3. Шевченко Ю.И. Линейные связности голономного и неголономного гладких многообразий // Тр. геом. семинара. Казань, 1997. Вып. 23. С. 175-186.
4. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНТИ. М., 1979. Т.9. С. 5-247.
5. Лумисте Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Учен. зап. Тартуск.ун-та. 1965. Вып. 177. С.6-41.
6. Шевченко Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1978. N9. С.124-133.

E.V. B o n d a r e n k o

CONNECTIONS ON THE MANIFOLD CENTRE PLANES IN THE PROJECTIVE SPACE

By mean's of Laptev's way group connection is investigated in the bundle, associated with manifold of centre planes in the projective space. It is shown, that the curvature object of a group connection in case of the nonholonomic space parameters is not tensor, but in holonomic case - tensor, containing four subtensors. Strong affine equipment of the manifold, consisting in the giving of fields Cartan's planes and normals of second kind. The notion of covariant differential and covariant derivatives of equipping quasitensor in the group connection is introduced. Covariant derivatives of

equipping quasitensor is tensor, containing three subtensors. It is proved, that strong affine equipment induces two types of group connection in the associated bundle.