УДК 514.76

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-2

Заметка о проблеме Грея

Рассматривается проблема Грея о существовании собственного почти келерова многообразия. Доказано, что 6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры октав не допускает собственной почти келеровой структуры.

Ключевые слова: проблема Грея, почти эрмитова структура, почти келерово многообразие, 6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры Кэли

Среди выделенных Альфредом Греем и Луисом М. Херреллой классов почти эрмитовых многообразий [1] более других изучены так называемые малые классы. Это классы келеровых, приближенно келеровых, почти келеровых, специальных эрмитовых и локально конформных келеровых многообразий. Отметим, что класс почти келеровых (almost Kählerian, AK-) многообразий продолжает оставаться предметом интенсивных исследований и в настоящее время, уступая, быть может, по популярности лишь классу приближенно келеровых многообразий. Этот факт обусловлен, среди прочего, тем, что с классом AK-многообразий связана одна из интереснейших задач эрмитовой геометрии — так называемая проблема Грея. Более пятидесяти лет тому назад Альфред Грей обратил внимание на то, что не известно ни одного примера собственного (то есть отличного от келерова) 6-мерного почти келерова многообразия [2]. А. Грей предположил, что 6-мерное много-

Поступила в редакцию 26.06.2022 г.

образие с отличной от келеровой почти келеровой структурой просто не существует. Однако ни указать пример 6-мерного собственного АК-многообразия и тем самым опровергнуть гипотезу, ни доказать предположение Грея до сих пор никому не удалось.

Работы по геометрии АК-многообразий посвящены в основном 4-мерным многообразиям (напомним, что почти эрмитова структура как частный вид почти комплексной структуры может быть реализована только на многообразиях четной размерности). Но время от времени появляются и результаты, так или иначе связанные с проблемой Грея. Например, один из ведущих специалистов в области геометрии 4-мерных АК-многообразий, английский математик Джон Армстронг, 20 лет назад получил красивый результат, приближающий решение проблемы Грея. Он доказал, что собственная почти келерова структура не может быть индуцирована на 6-мерном многообразии Эйнштейна [3]. Другие полученные к настоящему времени результаты в данном направлении имеют аналогичные формулировки: если 6-мерное многообразие обладает некоторыми дополнительными свойствами, то оно не допускает собственной почти келеровой структуры (не вдаваясь в детали, сошлемся на обзор [4]). В данной заметке мы приведем еще один результат такого же типа.

Напомним основные определения. Почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на многообразии M^{2n} называется упорядоченная пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH-) многообразием. С каждой AH-структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана 2-форма (ее называют фундаментальной формой почти эрмитовой структуры), определяемая равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}) .$$

Почти эрмитова структура называется почти келеровой, если $d\,F = 0$ [1].

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — общее 6-мерное подмногообразие алгебры октав. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется специальной, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^{\perp} ,$$

где $L(e_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется простой. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6), p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6), \ p \in M_0^6$, называют исключительными [4].

В работе [5] В. Ф. Кириченко ввел понятие 6-мерного подмногообразия типа Риччи алгебры октав: подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется подмногообразием типа Риччи, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В этой же работе получена полная классификация локально-симметрических почти эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи: почти эрмитово локально-симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи локально голоморфно изометрично либо C^3 (тем самым являясь простейшим келеровым многообразием) либо произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, скрученному (warped) вдоль CH^1 (здесь C^n — n-мерное комплексное евклидово пространство, CH^1 — комплексное гиперболическое пространство).

Воспользуемся записанной в A-репере первой группой структурных уравнений почти эрмитовой структуры на 6-мерном типа Риччи локально симметрическом подмногообразии алгебры Кэли [6]:

$$d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1;$$

$$d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1;$$

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11}\omega^1 \wedge \omega_\beta; \tag{1}$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11}\omega_1 \wedge \omega^\beta.$$

Здесь и далее $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\alpha, \beta = 2, 3$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$; $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$; $D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}$; $D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7$, $D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7$, где $\left\{T_{kj}^\varphi\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея) погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [4].

Сопоставим эти уравнения со структурными уравнениями почти келеровой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]} \omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + i T^7_{b[d} D_{c]\hat{a}} \omega^c \wedge \omega^d + \qquad (2)$$

$$+(-\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h\hat{c}} D_{\hat{g}d} + T^8_{\hat{a}d} T^8_{\hat{c}b} + T^7_{\hat{a}d} T^7_{\hat{c}b} - 2T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd})\omega_c \wedge \omega^d -$$

$$- i T^7_{\hat{a}[\hat{d}} D_{\hat{c}]b}\, \omega_c \wedge \omega_d,$$

где при этом $tr(D_{h\hat{c}}) = 0$.

Сравнив (1) и (2), мы можем сделать вывод о том, что локально-симметрическое почти келерово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи описывается структурными уравнениями Картана келеровой структуры [4]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b \;;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b;$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - 2T^7_{\hat{a}\hat{h}} T^7_{bg}\, \omega_h \wedge \omega^g.$$

Отсюда мы заключаем, что имеет место следующая

Теорема. *6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры октав не допускает собственной почти келеровой структуры.*

Этот результат вместе с полученным ранее другим результатом аналогичного вида [7], не являясь решением проблемы Грея, на наш взгляд, в той или иной степени приближает тот момент, когда эта проблема будет решена полностью.

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.
2. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, №2. P. 353—366.
3. *Armstrong J.* An ansatz for almost-Kähler, Einstein 4-manifolds // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. 2002. Vol. 542. P. 53—84.
4. *Banaru M.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.
5. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. №3. С. 6—13.
6. *Банару М.Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 11—17.
7. *Banaru M*. On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Kyungpook Mathematical Journal. 2003. Vol. 43, №1. P. 27—35.

MSC 2010: 53C55, 53B35

M.B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-2

A note on Gray problem

Submitted on June 26, 2022

We consider posed in 1960s Alfred Gray problem on the existence of a six-dimensional non-Kählerian almost Kählerian manifold.

We study six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra (the notion of such six-dimensional submanifolds of the octave algebra was introduced by Vadim Feodorovich Kirichenko).

Our main result is the following: it is proved that a six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifold of Ricci type of Cayley algebra does not admit a non-Kählerian almost Kählerian structure.

Keywords: Gray problem, almost Hermitian structure, almost Kählerian manifold, six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifold of Ricci type of Cayley algebra

References

1. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Gray, A.:* Some examples of almost Hermitian manifolds. Illinois J. Math., **10**:2, 353—366 (1966).

3. *Armstrong, J.:* An ansatz for almost-Kähler, Einstein 4-manifolds. J. für die Reine und Angewandte Mathematik, 542, 53—84 (2002).

4. *Banaru, M.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York). **207**:3, 354—388 (2015).

5. *Kirichenko, V.F.:* Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. Moscow University Math. Bull. Ser. 1. Mat. Mekh., 3, 6—13 (1994).

6. *Banaru, M.B.:* On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 47, 11—17 (2016).

7. *Banaru, M.:* On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Kyungpook Math. J., **43**:1, 27—35 (2003).