Здесь τ число всевозможных различных делителей числа n, отличных от 1 и самого n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худенко В.Н. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.126-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

В.П.Цапенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ $(P,Q)_{2,2}$

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$ пар фигур P и Q, где P -точка, Q - невырожденная квадрика. Выделен класс $(P,Q)^{*}_{2,2}$, характеризующийся свойством ассоциированных с конгруэнцией $(PQ)_{2,2}$ квадрик, рассмотрены некоторые свойства конгруэнции $(P,Q)^{*}_{2,2}$.

§ 1. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОНГРУЭНЦИИ $(P,Q)_{2,2}$

Отнесем конгруэнцию $(P,Q)_{2,2}$ к реперу $R=\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. (Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q). В качестве вершины A_3 выбран полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3),$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 .$$

Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера с учетом соответствующих нормировок вершин записываются соответственно в виде

$$\mathcal{F} \equiv (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} (x^0)^2 - 2x^1x^2 = 0, \\ x^3 = 0 . \end{cases} \qquad (2)$$

Конгруэнция $(P, Q)_{2,2}$ определяется системой пфаффовых уравнений:

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = \gamma_{3k}^0 \omega^k, \ \ \omega_i^j = \gamma_{ik}^j \omega^k,$$

$$\omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 \omega^k, \ \omega_3^i = \gamma_{3k}^i \omega^k, \ \omega_i^3 = \gamma_{ii}^3 \omega^i + a\omega^j, \qquad (3)$$

$$\omega_0^0 - \omega_3^3 = \alpha_k \omega^k, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = \beta_k \omega^k.$$

Здесь и в дальнейшем i, j, $k = 1, 2$; $i \neq j$ суммирование по i и j не производится, а также линейно независимые формы $\omega_0^i \overset{def}{=\!=} \omega^i$ приняты в качестве базисных. Фокальное многообразие конгруэнции (Q) квадрик Q определяется системой уравнений:

$$(4)\begin{cases} \mathcal{F} = 0, \\ \mathcal{F}_i \equiv \gamma_{1i}^2 (x^1)^2 + \gamma_{2i}^1 (x^2)^2 + \alpha_i (x^3)^2 + (1 - \gamma_{ji}^0) x^0 x^j - \end{cases}$$

$$-\gamma_{ii}^0 x^0 x^i - \gamma_{3i}^0 x^0 x^3 + \beta_i x^1 x^2 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i x^3 + (\gamma_{3i}^i - a) x^j x^3 = 0 .$$

Каждое из уравнений $F_i = 0$ задает инвариантную квадрику, ассоциированную с конгруэнцией $(P, Q)_{2,2}$. Обозначим эти квадрики соответственно Q_1 и Q_2.

§ 2. КОНГРУЭНЦИЯ $(P, Q)_{2,2}^*$

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $(P,Q)_{2,2}^*$ называется конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$, квадрики Q_1 и Q_2 которой распадаются на пары плоскостей с общей плоскостью $A_0A_1A_2$, причем поверхность (A_0) не является развертывающейся.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $(P,Q)_{2,2}^*$ существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конгруэнции $(P,Q)_{2,2}^*$ уравнения $F_i = 0$ принимают соответственно вид:

$$x^3(\alpha_i x^3 - \gamma_{3i}^0 x^0 + (\gamma_{3i}^j - \gamma_{ii}^3) x^i + (\gamma_{3i}^i - a) x^j) = 0, \qquad (5)$$

т.е. имеют место равенства

$$\gamma_{jj}^i = \gamma_{ji}^i = \beta_i = \gamma_{ii}^0 = \gamma_{ij}^0 - 1 = 0 . \qquad (6)$$

Учитывая условия (6) в уравнениях системы (3), получаем уравнения Пфаффа:

$$\omega_i^j = 0, \ \omega_i^0 = \omega^j, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = 0,$$

замыканием которых являются следующие квадратичные уравнения:

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j = 0, \ \omega_i^3 \wedge \omega_3^0 = 0, \ \omega_k^3 \wedge \omega_3^k = 0. \qquad (7)$$

В силу второго условия определения конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ $\omega^3_1 \wedge \omega^3_2 \neq 0$. Тогда квадратичные уравнения (7) приводят к следствиям:

$$\omega^0_3 = 0\,,$$
$$\omega^i_3 = q\,\omega^3_j\,. \qquad (8)$$

Продолжая (8), получаем:

$$dq + 2q(\omega^0_0 - \omega^3_3) = 0\,.$$

Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ имеет, таким образом, вид:

$$\omega^3_0 = 0,\quad \omega^0_3 = 0\,,\quad \omega^j_i = 0\,,\quad \omega^0_i = \omega^j,$$
$$\omega^3_i = \gamma^3_{ii}\,\omega^i + a\,\omega^j,\quad \omega^i_3 = q\,\omega^3_j\,,\ dq + 2q(\omega^0_0 - \omega^3_3) = 0, \quad (9)$$
$$\omega^0_0 - \omega^3_3 = \alpha_k\,\omega^k,\quad \omega^1_1 + \omega^2_2 - 2\,\omega^0_0 = 0\,.$$

Анализируя систему (9), находим:

$$S_1 = 3\,,\quad q = 5\,,\quad S_2 = 2\,,\quad Q = N = 7$$

и убеждаемся в справедливости теоремы. Исключая случай, когда поверхность (A_3) вырождается в точку, считаем в дальнейшем $q \neq 0$.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $(P,Q)^*_{2,2}$ обладает следующими свойствами: I/ фокусы луча прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют точки A_1 и A_2; 2/ линии, высекаемые торсами прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) на поверхностях (A_0), (A_3) и (A_1), (A_2) соответственно гармонически разделяют координатные линии $\omega^i = 0$; 3/ прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2); 4/ фокальное многообразие конгруэнции (Q), ассоциированной с $(P,Q)^*_{2,2}$, содержит конику C. (Конгруэнции квадрик, обладающие таким свойством, были рассмотрены в работе [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Фокусы $F^i = \lambda A_1 + \mu A_2$ луча прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением :

$$\gamma^3_{11}\,\lambda^2 - \gamma^3_{22}\,\mu^2 = 0\,,$$

откуда

$$(A_1A_2\,;\,F^1F^2) = -1\,.$$

2/ Находим уравнения торсов прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) соответственно

$$q\left(\gamma^3_{11}(\omega^1)^2 - \gamma^3_{22}(\omega^2)^2\right) = 0,\ \gamma^3_{11}(\omega^1)^2 - \gamma^3_{22}(\omega^2)^2 = 0$$

и убеждаемся в справедливости второго утверждения теоремы.
3/ Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2)

$$\omega^k_3 \wedge \omega^0_k = 0\,,\quad \omega^k \wedge \omega^0_k + \omega^3_k \wedge \omega^k_3 = 0 \quad \text{в силу}$$

системы (9) удовлетворяются тождественно.
4/ Система уравнений (4) для конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$ принимает вид:

$$\mathcal{F} = 0,$$
$$x^3\left(\alpha_i\,x^3 + \gamma^3_{ii}\,(q-1)\,x^i + a\,(q-1)\,x^j\right) = 0\,.$$

Сопоставляя эту систему с системой уравнений (2), получаем требуемое.

О п р е д е л е н и е 2. Линиями $\mathcal{L}_{\alpha'}$ ($\alpha' = 1,2,3,4$) на поверхности (A_α) называются линии, которые соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций

$$(A_0A_1) \qquad \omega^2=0,\ \gamma^3_{11}\omega^1+a\omega^2=0,$$

$$(A_0A_2) \qquad \omega^1=0,\ a\omega^1+\gamma^3_{22}\omega^2=0.$$

О п р е д е л е н и е 3. Точки пересечения касательных к линиям $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_3$ на поверхности (A_3) и к линиям $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_4$ на поверхности (A_0) с прямой A_1A_2 называются соответственно точками B_1, B_3, B_2, B_4.

Обозначим B_5 и B_6 -двойные точки гомографии [3] пары поверхностей (A_0) и (A_3).

Т е о р е м а 3. 1/Пары точек B_τ и $B_{\tau+1}$ $(\tau=1,3,5)$ гармонически разделяют точки A_1 и A_2. 2/Прямая A_0B_τ является полярой точки $B_{\tau+1}$ относительно коники C; прямая A_0B_s ($s=2,4,6$) является полярой точки B_{s-1} относительно коники C'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Точки $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ определяются формулами:

$$B_1=aA_1+\gamma^3_{11}A_2, \qquad B_2=-aA_1+\gamma^3_{11}A_2,$$

$$B_3=\gamma^3_{22}A_1+aA_2, \qquad B_4=-\gamma^3_{22}A_1+aA_2,$$

$$B_5=-\sqrt{\gamma^3_{22}}\,A_1+\sqrt{\gamma^3_{11}}\,A_2,\ B_6=\sqrt{\gamma^3_{22}}\,A_1+\sqrt{\gamma^3_{11}}\,A_2,$$

откуда следуют равенства

$$(A_1A_2;\ B_\tau B_{\tau+1})=-1.$$

2/В справедливости второго утверждения теоремы убеждаемся, сравнив уравнения прямых A_0B_τ и A_0B_s с уравнениями поляр соответствующих точек $B_{\tau+1}$ и B_{s-1} относительно коники C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в P_3.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.4, Калининград, 1974, с.86-106.

2.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

3.Ф и н и к о в С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.- Уч.записки МГПИ, 1951, № 16, вып.3, с.235-260.