

В. И. Субботин 

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия

geometry@mail.ru

SPIN-код: 2953-1580, AuthorID: 220832

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-7

О несоставных RR -многогранниках с условными ребрами

RR -многогранник — замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся множества — множество граней, образующих изолированные гранные звезды симметричных ромбических вершин и множество правильных граней. Если правильные грани такого многогранника одного типа, то он относится к первому типу RR -многогранников; если различного — ко второму типу. В настоящей работе доказано, что существуют только шесть несоставных RR -многогранников первого типа с условными ребрами. Два из найденных RR -многогранников могут быть разбиты плоскостями, проходящими через условные ребра ромбических граней, на правильные части, а один из RR -многогранников — на две ромбические пирамиды.

Ключевые слова: RR -многогранник, составной многогранник с условными ребрами, симметричная ромбическая вершина, ромбическая пирамида

1. Введение

Изучение классов многогранников, связанных с правильными (платоновыми) многогранниками занимает важное место в современной геометрии (см., например, [1—3]). В сере-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.

© Субботин В. И., 2026

дине XX века для обобщения правильных и архимедовых (полуправильных) многогранников возникла необходимость полного перечисления выпуклых многогранников в E^3 с условием правильности их граней. Н. Джонсоном в [4] были найдены 92 таких *правильногранных* многогранника (не считая платоновых многогранников, архимедовых многогранников, призм и антипризм). Впервые доказательство полноты списка найденных Н. Джонсоном многогранников было проведено В. Залгаллером в монографии [5]. Информацию о правильногранных многогранниках см., например, в [6—8]. В частности, в [8] описаны многогранники, двойственные правильногранным, и приведены координаты их вершин.

Дальнейшим развитием результатов Н. Джонсона и В. Залгаллера явилось полное перечисление выпуклых правильногранных многогранников с условными ребрами (см.: [9; 10]), список которых представлен в [13].

Выпуклый правильногранный многогранник, который плоскостями, проходящими через ребра, может быть разбит на правильногранные части, в работе [5, с. 14] называется *составным*.

Для RR -многогранников понятие составного многогранника нуждается в изменении, так как в RR -многограннике имеются грани, отличные от правильных. Поэтому далее приводится другое определение составного RR -многогранника.

В настоящей работе доказано существование и полнота списка из шести RR -многогранников первого типа с условными ребрами.

2. Определения

Звездой $Star(V)$ вершины V многогранника называется совокупность всех граней, которые имеют одну общую вершину, совпадающую с V .

Если звезда $Star(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных (то есть сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами) ромбов, то вершина V называется *n -ромбической*.

Если V расположена на оси вращения порядка n множества $Star(V)$, то V называется *симметричной n -ромбической вершиной*.

Ромбическая звезда называется *изолированной*, если она не имеет общих ребер с другими ромбическими звездами.

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *RR-многогранником*, если множество его граней является объединением двух непересекающихся непустых множеств: множества граней (ромбов, не квадратов), образующих изолированные звезды симметричных ромбических вершин, и множества правильных граней. Если указанные правильные грани — одинакового вида, то многогранник называется *RR-многогранником первого типа*; если правильные грани различного вида, то многогранник называется *RR-многогранником второго типа*.

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов звезды.

Если поместить в свободные углы n -ромбической звезды равные правильные многоугольные грани M_i , $i = 1, \dots, n$, то получим многогранную поверхность с краем — *ромбическую шапочку*.

Если грани M_i являются правильными треугольниками и к границе шапочки будет подклеен правильный n -угольник, получим выпуклый многогранник, который далее называется *n -ромбической пирамидой*.

Диагональ неправильной грани F многогранника, разбивающая F на два правильных многоугольника, называется *условным ребром* многогранника.

Ранее в [11] автором было дано определение составных *RR-многогранников* как таких многогранников, которые можно разбить плоскостями на ромбические пирамиды и много-

гранники с правильными гранями. В случае RR -многогранников с условными ребрами естественно дать определение в следующем виде:

Составным RR -многогранником с условными ребрами назовем такой RR -многогранник с условными ребрами, который можно разбить плоскостями, проходящими через ребра или условные ребра, на следующие части: 1) ромбические пирамиды, 2) многогранники с правильными гранями и, возможно, с условными ребрами.

Поясом граней называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} , а также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества не имеют общих ребер.

Данное понятие будет использовано далее для случая ромбических граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ в доказательстве существования некоторых RR -многогранников.

3. Основная теорема

Для того чтобы найти все составные RR -многогранники второго типа без условных ребер, в работе [11] автором рассматривались все возможные присоединения ромбических пирамид к многогранникам из следующих классов: 5 правильных (платоновых) многогранников, 13 полуправильных (архимедовых), 92 многогранника Джонсона (правильногранных) и бесконечные серии правильногранных призм и антипризм. Возможными считались при этом такие присоединения ромбических пирамид, в результате которых получается выпуклый RR -многогранник без условных ребер. Учитывая определение составного RR -многогранника без условных ребер, в [11] найдены (не считая ромбических пирамид, что естественно) все 46 таких присоединений.

Так как все RR -многогранники *первого типа* без условных ребер перечислены автором ранее, как составные, так и несоставные [12], следовательно, перечислены все составные RR -многогранники (и первого, и второго типа) без условных ребер.

Чтобы найти все несоставные RR -многогранники первого типа с условными ребрами, нужно рассмотреть доказательство полноты списка RR -многогранников первого типа без условных ребер и отдельно проверить в доказательствах существования каждого из 24 таких многогранников случаи возможного возникновения условных ребер. При этом нужно выделить из всех возможных с условными ребрами несоставные RR -многогранники.

Теорема. *Существуют только шесть несоставных RR -многогранников первого типа с условными ребрами.*

Доказательство. Шесть RR -многогранников, о которых говорится в теореме, следующие:

(1) с двумя тупоугольными 3-ромбическими вершинами и боковыми гранями в виде пояса граней из шести «правильных» (то есть составленных из двух правильных треугольников) ромбов (рис. 1, *а*; развертка на рис. 1, *б*);

(2) 4-ромбическая бипирамида (рис. 1, *в*);

(3) с двумя 5-ромбическими вершинами, отделенными друг от друга поясом граней из десяти правильных ромбов (рис. 1, *г*; развертку (без ромбических звезд) см. на рис. 1, *е*; вид «сверху», со стороны одной из звезд, см. на рис. 1, *д*);

(4—5) два многогранника с правильными ромбами: наращенный октаэдр (рис. 1, *ж*) и дважды наращенный кубооктаэдр (рис. 1, *з*);

(6) многогранник с тупоугольной и остроугольной 5-ромбической вершиной (рис. 1, *и*).

На рисунке 1 ромбические вершины, то есть вершины ромбических звезд, обозначены V и W .

Многогранник (1) появляется в результате анализа построения одного из RR -многогранников первого типа — 19-гранника с тупоугольной вершиной, связанного с икосаэдром (см.: [12]). Действительно, в [12, с. 197] указанный 19-гранник получен путем удаления одной треугольной грани, которую обозначим F , а также трех граней, соседних с F по ребру. Далее путем изгибания оставшейся многогранной поверхности в [12] доказано существование 19-гранника.

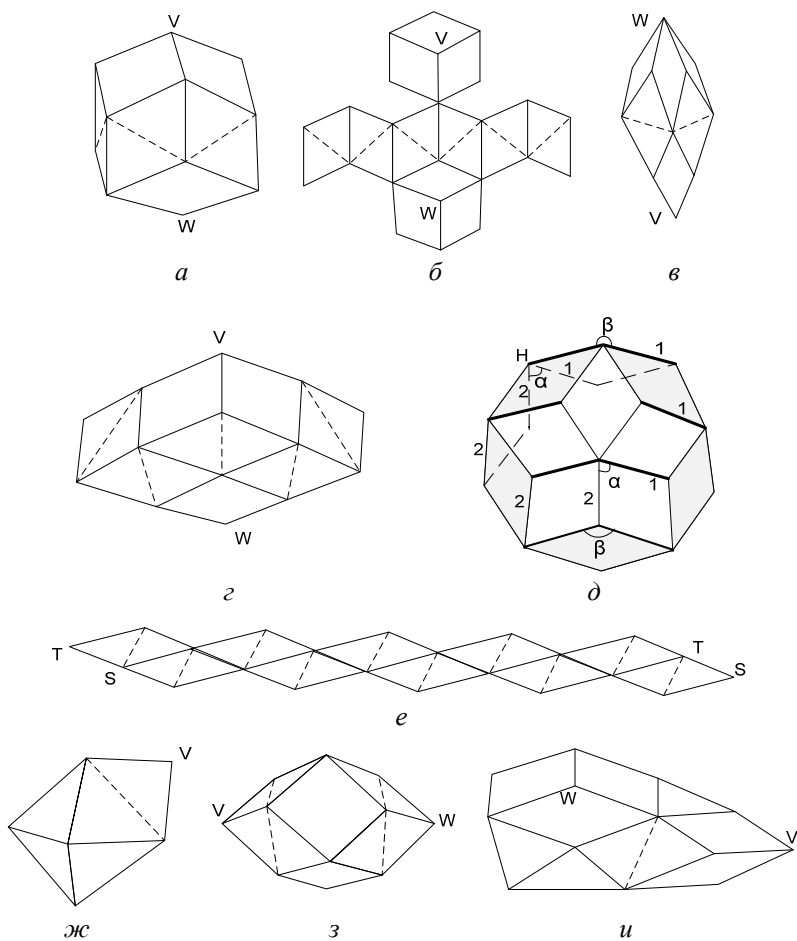


Рис. 1. Несоставные RR -многогранники первого типа с условными ребрами

Если в предыдущем построении 19-гранника удалить грань, противоположную F в икосаэдре, а также три грани, соседние с ней по ребрам, то получим 12-гранную поверх-

ность Φ с двумя краями и с зеркальной осью симметрии шестого порядка. Покажем, что существует 6-гранная поверхность Φ' с такой же, как и Φ , симметрией, но у которой грани составлены из шести пар треугольников так, что поверхность Φ' будет иметь шесть условных ребер. На рисунке 1, а, б эти ребра показаны пунктиром.

Для доказательства существования Φ' с единичными ребрами рассмотрим боковую поверхность правильной 6-угольной призмы с высотой $\frac{3}{2}$. Стороны оснований призмы будем считать единичными.

Отсечем плоскостями трехгранные углы через один верхнего и нижнего основания призмы так, чтобы поверхность после отсечения имела зеркальную ось симметрии шестого порядка. Отсечение будем проводить так, чтобы отсекающие плоскости пересекали ребра на расстоянии $\frac{1}{2}$ от соответствующего основания призмы и чтобы три отсекающие плоскости каждого из оснований пересекались по правильному треугольнику с вершинами на боковых ребрах призмы. Очевидно, к каждому краю поверхности Φ' можно подклеить тупоугольные ромбические звезды (рис. 1, б). Получим RR -многогранник (рис. 1, а).

Найдем тупые углы α ромбов ромбических звезд RR -многогранника (1).

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} \cos \omega = -0,125; \quad \alpha \approx 97,181^\circ,$$

где $\cos \omega = -\frac{1}{2}$, так как многогранник в этом случае получен отсечением правильной 6-угольной призмы.

Существование многогранника (2) очевидно, так как треугольные грани 4-ромбической пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды.

Докажем существование многогранника (3). Он получается при анализе доказательства существования RR -многогранника с двумя 5-ромбическими вершинами без условных ребер (см.

ссылку на [18, с. 300] в работе [12]). Было доказано, что такой многогранник не существует. Существенным в том доказательстве было то, что пары равносторонних треугольников в свободных углах β не образуют условные ребра.

Следовательно, теперь необходимо проверить существование RR -многогранника в случае, когда двугранный угол между правильными треугольниками в каждом свободном углу равен π . Рассмотрим 5-ромбическую звезду со свободными углами $\beta = \frac{2}{3}\pi$.

Вычисление углов α ромбов 5-ромбических звезд RR -многогранника (3) дает $\alpha \approx 64.719^\circ$.

Подклеивая в углы β ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$, получим ромбическую шапочку, которую обозначим K . Покажем, что в свободные углы между двумя ромбами шапочки K можно подклеить такие же ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$ и получить таким образом пояс граней из десяти правильных ромбов.

Рассмотрим рисунок 1, д, на котором многогранник (3) изображен со стороны одной из ромбических звезд. От одного угла β на этом рисунке к другому углу β можно перейти по параллельным ребрам, изображенными толстыми линиями. Таким образом, в свободные углы между двумя ромбами шапочки K можно подклеить такие же ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$. На рисунке 1, г видно также, что произвольный плоский острый угол α с вершиной в центре ромбической звезды и сторонами, обозначенными цифрами 1 и 2, равен острому углу с вершиной H и сторонами, обозначенными пунктиром на рисунке 1, г. Это легко видеть, если переходить по ребрам, параллельным сторонам 1 и 2 угла α .

Таким образом, шапочке K соответствует зеркально-поворотная ей шапочка K' . Угол поворота равен $\frac{\pi}{5}$. Существование многогранника (3) доказано.

Число ромбов в ромбических вершинах нельзя увеличить, так как при $n = 6$ получим $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Многогранники (4) и (5) — это известные многогранники $P_{3,33}$ и $P_{4,13}$ из списка [13].

Многогранник (6) получается при доказательстве существования одного, обозначаемого далее M , из двух RR -многогранников первого типа, связанных с икосаэдром и имеющих тупоугольные ромбические вершины. M получается следующим образом: удалим из икосаэдра десять треугольных граней, симметрично расположенных относительно некоторой фиксированной грани, и к границе полученной 10-гранной поверхности подклеим ромбическую тупоугольную звезду с вершиной W и тупым углом ромба, равным $\frac{3}{5}\pi$. Подклеенную звезду обозначим S .

Рассмотрим три вершины RR -многогранника M , в которых сходятся по пять треугольных граней. Выберем одну из этих вершин, U , и отсечем плоскостью правильную 5-угольную пирамиду с вершиной U . Подклеим вместо нее 5-ромбическую пирамиду, которую обозначим P . Получим многогранник (6) с двумя ромбическими вершинами — тупоугольной и остроугольной. Для острых углов α ромбов 5-ромбической звезды пирамиды P , где свободные углы $\beta = \frac{\pi}{3}$, получим $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Основание пирамиды P будет иметь три общих ребра s_1, s_2 и s_3 с тремя треугольными гранями и два общих ребра r_1 и r_2 со сторонами двух ромбов ромбической звезды S . Обозначим эти два ромба R_1 и R_2 . Как показано в [11, с. 105], ребра s_1, s_2 и s_3 будут условными после присоединения пирамиды P . Пусть φ_i — двугранные углы с ребрами r_1 и r_2 , которые треугольные грани пирамиды P образуют с ромбами R_1 и R_2 .

Покажем, что наше построение даст выпуклый многогранник, то есть что $\varphi_i < \pi$. Действительно, на месте каждого из ромбов R_1 и R_2 ранее в икосаэдре находилось по паре (соседних по ребру) треугольных граней. Две из этих треугольных граней, которые имеют общие ребра r_1 и r_2 с основанием пирамиды P , обозначим T_1 и T_2 . Обозначим ψ двугранные углы, которые составляют T_1 и T_2 с (соседними по ребрам r_1 и r_2) треугольными гранями пирамиды P . Так как $\psi = \pi$, $\varphi_i < \psi$, то $\varphi_i < \pi$.

Исчерпаны все возможные случаи возникновения условных ребер при перечислении RR -многогранников первого типа. Поэтому других несоставных RR -многогранников первого типа не существует.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Grunbaum B.* Regular polyhedral — old and new // *A equations mathematicae*. 1977. Vol. 16, № 1—2. P. 1—20.
2. *Coxeter H.S.M.* Regular Polytopes. N. Y., 1973.
3. *Cromwell P.R.* Polyhedra. Cambridge University Press, 1999.
4. *Jonson N.W.* Convex polyhedra with regular faces // *Canadian J. Math.* 1966. Vol. 18, № 1. P. 169—200. <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8>.
5. *Залгаллер В.А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 1—220.
6. *Деза М., Гришухин В.П., Штогрин М.И.* Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М., 2008.
7. *Rajwade A.R.* Convex Polyhedra with Regularity Conditions and Hilbert's Third Problem. Hindustan Book Agency, 2001. <https://doi.org/10.1007/978-93-86279-06-4>.
8. *Gilson B.R.* The Johnson Solids and Their Duals: A Comprehensive Survey. Create Space Independent Publishing Platform, 2014.
9. *Гурин А.М., Залгаллер В.А.* К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. Санкт-Петерб. матем. об-ва. 2008. Т. 14. С. 215—292.
10. *Тимофеев А.В.* К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. VI, вып. 3. С. 155—170.
11. *Subbotin V.I.* On the Composite RR -Polyhedra of the Second Type // *Siberian Mathematical Journal*. 2023. Vol. 64, № 2. P. 500—506. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020209>.
12. *Subbotin V.I.* О перечислении выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, № 5. С. 194—207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207>.

13. *Tupelo-Schneck R.* Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra> (дата обращения: 29.10.2025).

Для цитирования: Субботин В.И. О несоставных RR -многогранниках с условными ребрами // ДГМФ. 2026. №57 (1). С. 81—92. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-7>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC(2020): 52B15

V. I. Subbotin 

Platov South Russian State polytechnic university (NPI)
132, Prosvescheniya st., Novocherkassk, 346400, Russia
geometry@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-7

On non-composite RR -polytopes with conditional edges

Submitted on March 28, 2026

An RR -polyhedron is a closed convex polyhedron in E^3 whose face set can be partitioned into two non-empty disjoint sets: the set of faces forming isolated faceted stars of symmetric rhombic vertices and the set of regular faces. If the regular faces of such a polyhedron are of the same type, then it belongs to the first type; if they are different, then it belongs to the second type of RR -polyhedron. In the present paper, it is proved that there exist only six non-composite RR -polyhedrons of the first type with conditional edges. Two of the found RR -polyhedrons can be partitioned by planes passing through the conditional edges of the rhombic faces into regular parts, and one of the RR -polyhedrons can be partitioned into two rhombic pyramids.

Keywords: RR polyhedron, composite polyhedron with conditional edges, symmetric rhombic vertex, rhombic pyramid

References

1. *Grunbaum, B.*: Regular polyhedral — old and new. *Aequationes mathematicae*, **16**:1—2, 1—20 (1977).
2. *Coxeter, H.S.M.*: Regular Polytopes. Dover Publications (1973).
3. *Cromwell, P.R.*: Polyhedra. Cambridge University Press (1999).
4. *Jonson, N.W.*: Convex polyhedra with regular faces. *Can. J. Math.*, **18**:1, 169—200 (1966), <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8>.
5. *Zalgaller, V.A.*: Convex polyhedra with regular faces. *Zapiski nauch. sem. LOMI*, **2**, 1—220 (1967).
6. *Deza, M., Grishukhin, V.P., Shtogrin, M.I.*: Scale-isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices: Polytopes in Hypercubes and Z_n . Imperial College Press, (2004).
7. *Rajwade, A.R.*: Convex Polyhedra with Regularity Conditions and Hilbert's Third Problem. Hindustan Book Agency (2001), <https://doi.org/10.1007/978-93-86279-06-4>.
8. *Gilson, B.R.*: The Johnson Solids and Their Duals: A Comprehensive Survey. Create Space Independent Publishing Platform (2014).
9. *Gurin, A.M., Zalgaller, V. A.*: On the history of the study of convex polyhedra with regular faces and faces composed of regular ones. *American Math. Soc.*, **228**:2, 169—229 (2009).
10. *Timofeenko, A.V.*: On the list of convex regularhedra. *Modern Problems of Mathematics and Mechanics*, **4**:3, 155—170 (2011).
11. *Subbotin, V.I.*: On the Composite *RR*-Polyhedra of the Second Type. *Siberian Math. J.*, **64**:2, 500—506 (2023), <https://doi.org/10.1134/S0037446623020209>.
12. *Subbotin, V.I.*: On the enumeration of convex *RR*-polyhedra. *Chebyshevskii sbornik*, **24**:5, 194—207 (2023), <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207>.
13. *Tupelo-Schneck, R.*: Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. Available at: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra>.

For citation: Subbotin, V.I.: On non-composite *RR*-polytopes with conditional edges. *DGMF*, **57** (1), 81—92 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-7>.

