Библиографический список

1. Ц а п е н к о В.П. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P,Q) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1982. Вып.13.С.107–111.

УДК 514.76

φ-СОПРЯЖЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ДЕФОРМАЦИИ

М.А.Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

Пусть M_n – n-мерное C^∞-многообразие, $\mathcal{F}(M_n)$ – R-алгебра дифференцируемых на M_n функций, $T^r_s(M_n)$ – $\mathcal{F}$-модуль дифференцируемых тензорных полей на M_n типа (r,s), ∇-аффинная связность. Задание тензорного поля $\mathcal{D} \in T^1_2(M_n)$ определяет алгебраическую операцию $X \circ Y = \mathcal{D}(X,Y)$, $X, Y \in T^1_0(M_n)$, относительно которой $T^1_0(M_n)$ -алгебра деформации [1]. Обозначается $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$ [2].

Пусть $\varphi \in T^1_1(M_n)$, $\det\|\varphi_x\| \neq 0$, $\forall x \in M_n$.

О п р е д е л е н и е 1. Алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ называется φ-сопряженной алгебре $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$, если

$$\mathcal{D}^*(X,Y) = \varphi^{-1}\mathcal{D}(X,\varphi Y). \tag{1}$$

Имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "A"'] & \bar\nabla \arrow[d, "\bar A"] \\ \overset{*}{\nabla} \arrow[r, "\overset{*}{\mathcal{D}}"] & \overset{*}{\bar\nabla} \end{tikzcd},$$

где $\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \mathcal{D}(X,Y)$, $\overset{*}{\nabla}_X Y = \varphi^{-1}\nabla_X \varphi Y$ -связность, φ,-сопряженная [3] связности ∇, $\overset{*}{\bar\nabla}$ – φ- сопряженная связности $\bar\nabla$.

Т е о р е м а 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ коммутативна; 2) $(\bar d\varphi)(X,Y) = (d\varphi)(X,Y)$; 3) $\overset{*}{\bar S} = \overset{*}{S}$,

$$2)\ (\bar d\varphi)(X,Y) = (d\varphi)(X,Y). \tag{2}$$

$$3)\ \overset{*}{\bar S} = \overset{*}{S},$$

$$4)\ \{(\bar\nabla_X\varphi)(Y) - (\bar\nabla_Y\varphi)(X)\} - \{(\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_Y\varphi)(X)\} = \mathcal{D}(X,Y) - \mathcal{D}(Y,X),$$

где $\overset{*}{S}$, $\overset{*}{\bar S}$ -кручения связностей $\overset{*}{\nabla}$, $\overset{*}{\bar\nabla}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(\bar\nabla_X\varphi)(Y) = \bar\nabla_X\varphi Y - \varphi\bar\nabla_X Y = (\nabla_X\varphi)(Y) + \varphi(\mathcal{D}^*(X,Y) - \mathcal{D}(X,Y)),$$

$$(\bar d\varphi)(X,Y) = \bar\nabla_X\varphi Y - \bar\nabla_Y\varphi X - \varphi[X,Y] = (d\varphi)(X,Y) + \varphi(\mathcal{D}^*(X,Y) - \mathcal{D}(Y,X)),$$

$$\overset{*}{S}(X,Y) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \overset{*}{\nabla}_Y X - [X,Y] = \varphi^{-1}(d\varphi)(X,Y), \tag{3}$$

$$\overset{*}{\bar S}(X,Y) = \varphi^{-1}(\bar d\varphi)(X,Y),$$

$$A(X,Y) = \overset{*}{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \varphi^{-1}(\nabla_X\varphi)(Y),$$

$$\bar A(X,Y) = \overset{*}{\bar\nabla}_X Y - \bar\nabla_X Y = \varphi^{-1}(\bar\nabla_X\varphi)(Y).$$

Из (3) следует (2).

С л е д с т в и е 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ -параллельно в связности ∇; 2) $\nabla = \nabla^*$; 3) $(\bar\nabla_X\varphi)(Y) = \varphi(\mathcal{D}^* - \mathcal{D})(X,Y)$.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\overset{*}{\mathcal{D}}(X,Y) - \mathcal{D}^*(Y,X) = \mathcal{D}(X,Y) - \mathcal{D}(Y,X)$;

2) $(\bar\nabla_X\varphi)(Y) - (\bar\nabla_Y\varphi)(X) = (\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_X\varphi)(X)$;

3) $(\bar d\varphi)(X,Y) - \varphi\bar S(X,Y) = (d\varphi)(X,Y) - \varphi S(X,Y)$;

4) $\overset{*}{\bar S} - \overset{*}{S} = \bar S - S$,

где S, S^*, $\bar S$, $\overset{*}{\bar S}$ кручения связностей ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\bar\nabla$, $\overset{*}{\bar\nabla}$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) и соотношений

$$(\nabla_X\varphi)(Y) - (\nabla_Y\varphi)(X) = (d\varphi)(X,Y) - \varphi S(X,Y),$$

$$(\bar\nabla_X\varphi)(Y) - (\bar\nabla_Y\varphi)(X) = (\bar d\varphi)(X,Y) - \varphi\bar S(X,Y).$$

Поле $\varphi \in T^1_1(M_n)$ называется полем Кодацци [4], если $d\varphi = 0$.

Из теорем 1,2 вытекают два следствия.

С л е д с т в и е 2. Если алгебра $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D}^*)$ коммутативна, то следующие утверждения эквивалентны: 1) φ -поле Кодацци в связности ∇, 2) φ -поле Кодацци в связности $\bar\nabla$.

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ - поле Кодацци в связности ∇ (в связности $\bar\nabla$), 2) $S^* = 0$ ($\overset{*}{\bar S} = 0$).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что пара связностей $\{\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\overset{1}{\bar\nabla},\overset{2}{\bar\nabla}\}$, если существует поле $\mathcal{D} \in T^1_2(M_n)$ такое, что $\overset{1}{\bar\nabla} - \overset{1}{\nabla} = \overset{2}{\bar\nabla} - \overset{2}{\nabla}$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) пара $\{\nabla,\overset{*}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\bar\nabla,\overset{*}{\bar\nabla}\}$; 2) пара $\{\nabla,\bar\nabla\}$ деформируется в пару $\{\overset{*}{\nabla},\overset{*}{\bar\nabla}\}$, 3) $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$, 4) $\bar A = A$.

Библиографический список

1. Waisman I. Sur quelques formules du calcul du Ricci global // Comment. math helv. 1966. v. 41. N2. p.73–87.
2. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebre associel a un champ tensorial du type (1.2) // Acta Math. Acad. Sci Hungarical. 1978. v.31. p.27–35.

3.В е д е р н и к о в С.В. Геометрия пространства пар//ВИНИТИ. М.,1980. 39с. Деп.в ВИНИТИ. 25.2.80,№1454-80.

4.Б у р г и н ь о н Ж.П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе.1978/79.М., 1985.С.261-279.

УДК 514.76

ОБЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВАЯ СВЯЗНОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Дана интерпретация общей фундаментально-групповой связности Г.Ф. Лаптева с помощью его способа задания связностей в главных расслоениях,распространенного на обобщенные расслоения,характеризующиеся непустыми пересечениями базы и слоев.

Основная работа Лаптева [1] написана без явного использования теории расслоенных пространств и связностей в них,поэтому давно возникла проблема интерпретации понятий и результатов работы с точки зрения расслоений.Эта проблема частично разрешена в книге [2],однако там практически не затронуто пространство общей фундаментально-групповой связности,обобщающее однородное пространство,пространства аффинной и проективной связности,главное и однородное расслоения со связностями.Такое пространство определяется структурными уравнениями:

$$\left\{\begin{aligned} d\omega^{s_0} &= R^{s_0}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_0}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1},\\ d\omega^{s_1} &= \tfrac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} +\\ &\quad + R^{s_1}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1},\\ d\omega^{s_2} &= \tfrac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\,\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \tfrac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} +\\ &\quad + R^{s_2}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

где индексы принимают следующие значения: $p_0, q_0, s_0, \ldots = -\overline{\varkappa+1,0}$; $p_1, q_1, s_1, \ldots = \overline{1,\tau}$; $p_2, q_2, s_2, \ldots = \overline{\tau+1,r}$.Здесь $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ -структурные константы группы Ли G ,содержащей подгруппу H ,поэтому

$$C^{s_1}_{p_2q_2} = 0, \qquad (2)$$

причем,например,индекс s_{12} принимает значения индексов s_1 и s_2.

В общем случае система уравнений (1) задает расслоения не вполне удовлетворительно,что отражают следующие факты:1)координаты

точки пространства фундаментально -групповой связности расчленяются Лаптевым [3] на главные,побочные и локально-групповые с помощью вполне интегрируемых систем уравнений лишь в случае усеченного кручения,когда $R^{s_1}_{p_0q_0} = 0$ (аналогичное разделение можно произвести при $R^{s_0}_{p_1q_1} = 0$);2) в работе [4] Лаптев называет тензором кручения-кривизны лишь подобъект $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}}$ объекта $R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}$, видимо,потому,что условия вырождения пространства со связностью в однородное пространство [1 ,с.320] имеют вид $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}} = 0$;3) Лаптев предполагает,что размерность пространства геометрических элементов больше числа главных форм связности,вследствие чего появляются побочные формы [1,с.305]; 4) в последующих работах Лаптева не употребляется общая связность, а используются только связности в главном расслоении и проективная (см.,напр.,[5]); 5) побочные параметры интерпретируются В.С.Малаховским [6,с.195] как абсолютные инварианты опорной фигуры;если инвариантов нет,то получается рассмотренный Лаптевым случай,в котором,однако,присутствуют побочные параметры.

Проанализируем пример пространства геометрических элементов с достаточно общей фундаментально-групповой связностью.Рассмотрим поверхность в пространстве аффинной связности с присоединенным комплексом индуцированных внутренних геометрий.Покажем,что в этом случае можно обойтись связностями в главных расслоениях.Сделаем два предположения:а) не будем ограничивать внутреннюю геометрию поверхности индуцированной аффинной связностью,как это делал Лаптев [1,с.322]; б) зафиксируем произвольную нормаль поверхности,потому что задание множества всех нормалей,фактически,ничего не определяет.При этом возникают две возможности: 1) преобразовать все вторичные формы,согласно способу Лаптева,задания связности в главном расслоении и,охватывая объект связности с помощью поля нормалей,получить главное расслоение со связностью,типовым слоем которого служит подгруппа стационарности центрированной касательной плоскости; 2) адаптируя подвижной репер полю нормалей,прийти к главному расслоению со связностью,типовым слоем которого является прямое произведение двух двойственных линейных групп,действующих в центрированных касательной плоскости и нормали.

Решать проблему интерпретации связности начал сам Лаптев [5], предложив способ задания связности в главном расслоении.Структурные уравнения главного расслоения со связностью можно получить из системы уравнений (1) тремя путями.Во-первых,отбрасывая побочные формы связности ω^{s_0} ,имеем уравнения связности Картана [2]:

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1}\wedge\left(\tfrac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{q_2} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1}\right),$$