V. Malakhovsky, E. Yurova

Tensor fields on *m*-dimensional manifold of hyperellipsoids in *n*-dimensional affine space

In n-dimensional affine space A_n m-parametric families V_m $(n-1)$-dimensional nondegenerates central nonruled hyperquadrics (hyperellipsoids) Q are investigated. Tensor fields and invariant families of different geometric images (points, hyperplanes, hypercones) are found. Focal manifold for each hyperellipsoid is defined. For the case $m=n-1$ canonical frame with ends of base vectors in focal points and original in the center is constructed.

УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
polyakova_@mail.ru

Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков

Продолжается исследование расслоений реперов 1-го и 2-го порядков и касательных расслоений 1-го и 2-го порядков к расслоению линейных реперов на многообразии, проводимое в работах [2—4] и опирающееся на структурные уравнения и деривационные формулы. Способом Лаптева — Лумисте заданы аффинные связности 1-го и 2-го порядков. Получены разложения компонент аффинной связности 1-го и 2-го порядков с помощью слоевых координат того же порядка, что и связность, и некоторых функций, зависящих от базисных и слоевых координат низшего порядка, чем порядок связности. Рассмотрены некоторые специальные связности, названные простейшими и естественными; указаны их свойства.

Ключевые слова: касательные расслоения 1-го и 2-го порядков, базисные и слоевые координаты, структурные уравнения, аффинные связности 1-го и 2-го порядков, ковариантные производные.

1. Ковариантное задание аффинной связности 1-го порядка. Зададим связность в расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием X_m способом Лаптева — Лумисте [7]

$$\tilde{\omega}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} = \omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} - \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}\omega^k ; \ \Delta\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} + \omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}}\omega^l , \tag{1}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ имеет вид

$$\Delta\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = d\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} + \Gamma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{jk}}\omega^i_s - \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}}\omega^s_{\mathrm{j}} - \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{js}}\omega^s_{\mathrm{k}} .$$

Объект $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl}\}$ назовем *первым продолжением аффинной связности*, причем пфаффовы (неголономные) производные Γ^i_{jkl} удовлетворяют сравнениям

$$d\Gamma^i_{jk\mathrm{l}} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_{sl} - \Gamma^i_{sk}\omega^s_{jl} - \Gamma^i_{js}\omega^s_{kl} + \omega^i_{jkl} \cong 0 .$$

В уравнениях (1_2) раскроем действие тензорного дифференциального оператора Δ и, переходя к натуральному кореперу по формулам

$$\omega^i = x^i_j dx^j , \ \omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k ,$$

$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l ,$$

получим

$$d\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = (\Gamma^{\mathrm{l}}_{\mathrm{jk}} + x^{\mathrm{l}}_{\mathrm{jk}})(\overset{*}{x}{}^s_l \, dx^{\mathrm{i}}_{\mathrm{s}} + x^i_{ls}\omega^s) - (\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}} + x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}})(\overset{*}{x}{}^s_j \, dx^{\mathrm{l}}_{\mathrm{s}} + x^l_{js}\omega^s) -$$

$$-(\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}} + x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}})(\overset{*}{x}{}^s_k \, dx^{\mathrm{l}}_{\mathrm{s}} + x^l_{ks}\omega^s) - dx^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} - (x^{\mathrm{s}}_{\mathrm{jk}}x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sl}} - x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}})\omega^l + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}}\omega^l ,$$

где x^i, x^i_j — базисные координаты на $L(X_m)$, x^i_{jk} — слоевые координаты 1-го порядка, x^i_{jkl} — слоевые координаты 2-го порядка на расслоении $TL(X_m)$; $\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}^i_j \end{pmatrix}$ — обратная матрица, т. е. $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$. Считая $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s, x^l_{sp})$ функциями базисных и слоевых координат 1-го порядка, получим

$$\frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^l_s} dx^l_s + \frac{\partial \Gamma^{i}_{jk}}{\partial x^l_{sp}} dx^l_{sp} = -\delta^i_l \delta^s_j \delta^p_k dx^l_{sp} +$$

$$+\left(\delta^i_l (\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk}) \overset{*}{x}{}^s_p - (\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk}) \overset{*}{x}{}^s_j - (\Gamma^i_{jl} + x^i_{jl}) \overset{*}{x}{}^s_k \right) dx^l_s +$$

$$+\Big((\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk}) x^i_{ps} - (\Gamma^i_{pk} + x^i_{pk}) x^p_{js} - (\Gamma^i_{jp} + x^i_{jp}) x^p_{ks} + \qquad (2)$$

$$+\Gamma^i_{jks} + x^i_{jks} - x^p_{jk} x^i_{ps} \Big) x^s_l dx^l .$$

Приравнивая коэффициенты при дифференциалах dx^l_{sp}, получим равенство $\dfrac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}} = -\delta^i_l \delta^s_j \delta^p_k$ и, следовательно, разложение $\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} + \gamma^i_{jk}$ для компонент объекта связности 1-го порядка с помощью слоевых координат того же порядка и функций $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s)$, зависящих только от базисных координат и образующих тензор.

Утверждение. *Для аффинной связности справедливо разложение* $\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} + \gamma^i_{jk}$, *где* $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s)$. *Равенство нулю тензора* $\gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + x^i_{jk}$ *выделяет связность* $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$, *которую назовем простейшей.*

Приравнивая коэффициенты при дифференциалах dx_s^l, dx^l, получим

$$\frac{\partial \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}}{\partial x^l_s} = \delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{l}}(\Gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}} + x^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}})\overset{*}{x}{}^s_p - (\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}} + x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}})\overset{*}{x}{}^s_j - (\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}} + x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}})\overset{*}{x}{}^s_k, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = \Big((\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk})x^i_{ps} - (\Gamma^i_{pk} + x^i_{pk})x^p_{js} - (\Gamma^i_{jp} + x^i_{jp})x^p_{ks}\Big)x^s_l +$$

$$+ \Big(\Gamma^i_{jks} + x^i_{jks} - x^p_{jk}x^i_{ps}\Big)x^s_l. \quad (4)$$

Уравнения (3, 4) можно записать в виде

$$\frac{\partial \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}}{\partial x^l_s} = \delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{l}}\gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}}\overset{*}{x}{}^s_p - \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}}\overset{*}{x}{}^s_j - \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}}\overset{*}{x}{}^s_k, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}}{\partial x^l} = \Big(\gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}}x^i_{ps} - \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{pk}}x^p_{js} - \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jp}}x^p_{ks} + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jks}} + x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jks}} - x^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}}x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{ps}}\Big)x^{\mathrm{s}}_{\mathrm{l}},$$

а для пфаффовых производных компонент аффинной связности имеем выражение

$$\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}} = \frac{\partial \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}}{\partial x^p}\overset{*}{x}{}^p_l - \gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}}x^i_{pl} + \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{pk}}x^p_{jl} + \gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jp}}x^p_{kl} - x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}} + x^{\mathrm{p}}_{\mathrm{jk}}x^{\mathrm{i}}_{\mathrm{pl}}.$$

Лемма. *Для производной* $\dfrac{\partial \overset{*}{x}{}^i_j}{\partial x^p_q}$ *обратной матрицы* $\overset{*}{x}{}^i_j$ *справедлива формула* $\partial^q_p \overset{*}{x}{}^i_j = -\overset{*}{x}{}^q_j \overset{*}{x}{}^i_p$.

Действительно, дифференцируя $x^k_j \overset{*}{x}{}^i_k = \delta^i_j$ по x^p_q получим $\dfrac{\partial x^k_j}{\partial x^p_q}\overset{*}{x}{}^i_k + x^k_j \dfrac{\partial \overset{*}{x}{}^i_k}{\partial x^p_q} = 0$, тогда $\delta^q_j \overset{*}{x}{}^i_p + x^k_j \partial^q_p \overset{*}{x}{}^i_k = 0$, откуда следует доказываемая формула.

Замечание 1. Рассмотрим законы преобразований для тензора типа (1, 2)

$$\bar{f}^{\rm i}_{\rm jk}=f^{\rm p}_{\rm qr}\overset{*}{x}{}^{i}_{p}\,x^{q}_{j}x^{r}_{k}\,,\ f^{\rm i}_{\rm jk}=\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^{i}_{p}\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}\,.$$

Продифференцируем второе равенство по x^l_s:

$$\frac{\partial f^{\rm i}_{\rm jk}}{\partial x^l_s}=\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}\frac{\partial x^i_p}{\partial x^l_s}\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}+\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^i_p\frac{\partial \overset{*}{x}{}^{q}_{j}}{\partial x^l_s}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}+\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^i_p\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\frac{\partial \overset{*}{x}{}^{r}_{k}}{\partial x^l_s}\,.$$

Учитывая $\dfrac{\partial x^i_p}{\partial x^l_s}=\delta^i_l\delta^s_p$, $\dfrac{\partial \overset{*}{x}{}^{q}_{j}}{\partial x^l_s}=-\overset{*}{x}{}^{s}_{j}\overset{*}{x}{}^{q}_{l}$, получим

$$\frac{\partial f^{\rm i}_{\rm jk}}{\partial x^l_s}=\bar{f}^{\rm s}_{\rm qr}\delta^i_l\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}-\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^i_p\overset{*}{x}{}^{q}_{l}\overset{*}{x}{}^{s}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}-\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^i_p\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{l}\overset{*}{x}{}^{s}_{k}\,.$$

Подставляя в это выражение $\bar{f}^{p}_{qr}$, приходим к тензорному закону (5). Итак, из преобразований компонент классического тензора (если заменить частные производные $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$ на координаты x^i_j) можно получить более общие уравнения (5) тензора в смысле Г. Ф. Лаптева.

Замечание 2. Рассмотрим законы преобразований

$$\bar{f}^{\rm i}_{\rm jk}+\bar{x}^{\rm i}_{\rm jk}=(f^{\rm p}_{\rm qr}+x^{\rm p}_{\rm qr})\overset{*}{x}{}^{i}_{p}\,x^{q}_{j}x^{r}_{k}\,,\ f^{\rm i}_{\rm jk}+x^{\rm i}_{\rm jk}=(\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}+\bar{x}^{\rm p}_{\rm qr})x^{i}_{p}\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}\,;$$

$$\bar{f}^{\rm i}_{\rm jk}=f^{\rm p}_{\rm qr}\overset{*}{x}{}^{i}_{p}\,x^{q}_{j}x^{r}_{k}+(x^{\rm p}_{\rm qr}\overset{*}{x}{}^{i}_{p}\,x^{q}_{j}x^{r}_{k}-\bar{x}^{\rm i}_{\rm jk})\,,$$

$$f^{\rm i}_{\rm jk}=\bar{f}^{\rm p}_{\rm qr}x^{i}_{p}\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}+(\bar{x}^{\rm p}_{\rm qr}x^{i}_{p}\overset{*}{x}{}^{q}_{j}\overset{*}{x}{}^{r}_{k}-x^{\rm i}_{\rm jk})\,.$$

Тогда дифференцируя последнее равенство по x_s^l и подставляя в полученное выражение функции $\bar{f}_{qr}^p$, получим закон (3), т. е. часть уравнений на объект связности, записанный в смысле Г. Ф. Лаптева.

Объекты кручения T_{jk}^i и кривизны R_{jkl}^i аффинной связности выражаются по формулам

$$T^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}, \ \tfrac{1}{2} R^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkl}} = \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j[kl]}} - \Gamma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{j[k}} \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sl]}}$$

и удовлетворяют уравнениям $\Delta T_{jk}^i = T_{jkl}^i \omega^l$, $\Delta R_{jkl}^i = R_{jkls}^i \omega^s$.

Из разложения $\Gamma_{jk}^i = -x_{jk}^i + \gamma_{jk}^i$ при симметричных слоевых координатах получим, что кручение и кривизна (в общем случае) выражаются по формулам

$$\tfrac{1}{2} T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i, \ \tfrac{1}{2} R_{jkl}^i = \frac{\partial \gamma_{j[k}^i}{\partial x^s} \overset{*}{x}{}^s_{l]} - \gamma^s_{j[k} \gamma^i_{sl]},$$

т. е. зависят только от базисных координат x^i, x_j^i.

2. Простейшая аффинная связность 1-го порядка и ее первое продолжение.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства простейшей связности* $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$.

1) Простейшая связность является плоской и симметричной.

Действительно, в силу симметрии слоевых координат получим

$$\overset{0}{T}{}^i_{jk} = \frac{1}{2} x^i_{[jk]} = 0, \ \overset{0}{R}{}^i_{jkl} = -\frac{1}{2} x^i_{j[kl]} = 0.$$

2) Равенство нулю ковариантных производных координат x_j^i *выделяет простейшую связность. При этом вертикальный вектор* $v = x_j^i e_i^j$ *абсолютно параллелен относительно простейшей связности.*

Действительно, ковариантные производные координат x^i_j выражаются по формуле $\nabla_k x^i_j = -x^l_j(\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk})$.

3) Справедливо равенство $\omega^i_j(\varepsilon_k) = -x^i_{jk}$, *т. е.* $\omega^i_j(\varepsilon_k) = \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$, *где* $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j \in T_M X_m$, $M \in X_m$.

4) Пфаффовы производные простейшей связности выражаются по формуле $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl} = x^i_{sl} x^s_{jk} - x^i_{jkl}$.

Легко показать, что $\omega^i_{jk}(e_l) = x^m_{jk} x^i_{ml} - x^i_{jkl}$, т. е.

$$\omega^i_{jk}(e_l) = \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl},$$

где $e_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j + x^k_{ji}\, e^j_k$ — невертикальные векторы касательного пространства $T_A L(X_m)$, $A \in L(X_m)$.

5) Для простейшей связности справедливы следующие равенства:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{i\ s}_{jkl} = d\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}(e^s_l) = \partial_{e^s_l} \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = 0,$$

т. е. слоевые пфаффовы производные простейшей связности равны нулю; вертикальные векторы e^s_l *аннулируют формы* $d\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$; *производные компонент простейшей связности по направлению вертикальных векторов равны нулю.*

6) В простейшей связности горизонтальные векторы 1-го порядка имеют вид $\overset{0}{\tilde{e}}_i = \varepsilon_i$, *а горизонтальные формы связности* $\overset{h}{\tilde{\omega}} = \omega^i \varepsilon_i$ (см.: [5, с. 146]).

Рассмотрим отображение $d\Gamma^i_{jk}(\varepsilon_l) = M^{\ i}_{jkl}$, где объект

$$M^{\ i}_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - x^i_{js}x^s_{kl} - x^i_{sk}x^s_{jl} + x^i_{jkl} + x^i_{sl}\Gamma^s_{jk} - x^s_{jl}\Gamma^i_{sk} - x^s_{kl}\Gamma^i_{js}$$

является тензором, т.е. его обращение в нуль инвариантно и выделяет охват $\overset{1}{\Gamma}{}^{\,i}_{jkl}$. Этот охват получается из условия $d\Gamma^i_{jk}(\varepsilon_l) = 0$, т.е. векторы $\varepsilon_l \in TX_m$ аннулируют формы $d\Gamma^i_{jk}$:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\,i}_{jkl} = x^i_{js}x^s_{kl} + x^i_{sk}x^s_{jl} - x^i_{jkl} - x^i_{sl}\Gamma^s_{jk} + x^s_{jl}\Gamma^i_{sk} + x^s_{kl}\Gamma^i_{js};$$

$$\overset{1}{R}{}^{\,i}_{jkl} = (x^i_{s[k} + \Gamma^i_{s[k})(x^s_{jl]} + \Gamma^s_{jl]}).$$

Замечание 3. Если подставить $\overset{1}{\Gamma}{}^{\,i}_{jkl}$ в производные (4), то получим $\dfrac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = 0$, а тогда $\dfrac{\partial\gamma^i_{jk}}{\partial x^l} = 0$, т.е. функции $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^s_l)$ зависят только от координат x^s_l.

3. Ковариантное задание аффинной связности 2-го порядка. Ковариантный способ задания аффинной связности 2-го порядка состоит в построении форм [1, с. 167; 6]

$$\tilde{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - L^i_{jkl}\omega^l; \tag{6}$$

$$\Delta L^i_{jkl} - \Gamma^i_{sl}\omega^s_{jk} + \Gamma^s_{jl}\omega^i_{sk} + \Gamma^s_{kl}\omega^i_{js} + \omega^i_{jkl} = L^i_{jkls}\omega^s. \tag{7}$$

Объект $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl}\}$ является *объектом аффинной связности 2-го порядка*, задающим связность в касательном расслоении 2-го порядка T^2X_m.

Аналогично сформулированному утверждению о разложении объекта связности 1-го порядка из уравнений (7) можно получить разложение $L^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + l^i_{jkl}$ для компонент объекта связности 2-го порядка с помощью слоевых координат 2-го порядка и функций $l^i_{jkl} = l^i_{jkl}(x^i, x^i_j, x^i_{jk})$, зависящих от базисных координат и слоевых координат первого порядка. Функции l^i_{jkl} удовлетворяют сравнениям

$$\Delta l^i_{jkl} - \gamma^i_{sl}\omega^s_{jk} + \gamma^s_{jl}\omega^i_{sk} + \gamma^s_{kl}\omega^i_{js} \equiv$$
$$\equiv -(x^s_{jl}\omega^i_{sk} + x^i_{sk}\omega^s_{jl}) - (x^s_{kl}\omega^i_{js} + x^i_{js}\omega^s_{kl}).$$

Внешний дифференциал форм (6) приведем к виду

$$d\tilde{\omega}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \tilde{\omega}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{jk}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{l}} - \tilde{\omega}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{lk}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{j}} - \tilde{\omega}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jl}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{k}} + \Omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}, \tag{8}$$

где $\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}R^i_{jkls}\omega^l \wedge \omega^s$ — основные формы кривизны в совокупности форм кривизны $\{\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^j, \Omega^i_{jk}\}$ аффинной связности 2-го порядка, $\frac{1}{2}R^i_{jkls} = L^i_{jk[ls]} - L^t_{jk[l}\Gamma^i_{ts]} + L^i_{tk[l}\Gamma^t_{js]} + L^i_{jt[l}\Gamma^t_{ks]}$ — основные компоненты объекта кривизны 2-го порядка $R^2 = \{R^i_{jkl}, R^i_{jkls}\}$.

Уравнения на компоненты R^i_{jkls} имеют вид

$$\Delta R^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jkls}} - R^i_{pls}\omega^p_{jk} + R^p_{jls}\omega^i_{pk} + R^p_{kls}\omega^i_{jp} = R^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jklsp}}\omega^p, \tag{9}$$

т. е. компоненты R^i_{jkls} образуют тензор вместе с тензором аффинной кривизны 1-го порядка R^i_{jkl}; $R^2 = \{R^i_{jkl}, R^i_{jkls}\}$ — тензор кривизны 2-го порядка. Внося формы связности 2-го порядка в уравнения (9), получим

$$\nabla^2 R^i_{jkls} = \nabla^2_p R^i_{jkls}\omega^p;$$

$$\nabla^2 R^i_{jkls} = dR^i_{jkls} + R^p_{jkls}\widetilde{\omega}^i_p - R^i_{pkls}\widetilde{\omega}^p_j - R^i_{jpls}\widetilde{\omega}^p_k - R^i_{jkps}\widetilde{\omega}^p_l -$$

$$- R^i_{jklp}\widetilde{\omega}^p_s - R^i_{pls}\widetilde{\omega}^p_{jk} + R^p_{jls}\widetilde{\omega}^i_{pk} + R^p_{kls}\widetilde{\omega}^i_{jp},$$

$$\nabla^2_p R^i_{jkls} = R^i_{jklsp} - R^q_{jkls}\Gamma^i_{qp} + R^i_{qkls}\Gamma^q_{jp} + R^i_{jqls}\Gamma^q_{kp} + R^i_{jkqs}\Gamma^q_{lp} +$$

$$+ R^i_{jklq}\Gamma^q_{sp} + R^i_{qls}L^q_{jkp} - R^q_{jls}L^i_{qkp} - R^q_{kls}L^i_{jqp}$$

— ковариантный дифференциал и ковариантные производные компонент R^i_{jkls} объекта кривизны 2-го порядка в связности Γ^2.

С помощью внешнего ковариантного дифференциала D уравнения (8) запишем следующим образом: $D\widetilde{\omega}^i_{jk} = \Omega^i_{jk}$. Дифференцируя (8) внешним образом, получим тождества Бьянки второго порядка в *бескоординатном индексном представлении* $\overset{2}{D}\,\Omega^i_{jk} = 0$, где

$$\overset{2}{D}\,\Omega^i_{jk} = d\Omega^i_{jk} + \Omega^l_{jk}\wedge\widetilde{\omega}^i_l - \Omega^i_{lk}\wedge\widetilde{\omega}^l_j - \Omega^i_{jl}\wedge\widetilde{\omega}^l_k +$$

$$+ \widetilde{\omega}^l_{jk}\wedge\Omega^i_l - \widetilde{\omega}^i_{lk}\wedge\Omega^l_j - \widetilde{\omega}^i_{jl}\wedge\Omega^l_k$$

— внешний ковариантный дифференциал форм кривизны 2-го порядка в связности Γ^2. *Координатное индексное представление* тождеств (11) имеет вид

$$\nabla^2_{\{p}R^i_{|jk|ls\}} + R^i_{jkq\{s}T^q_{pl\}} = 0.$$

4. Специальные аффинные связности 2-го порядка. Ковариантные производные невертикальных векторов и объекта связности Γ^i_{jk} относительно аффинной связности 2-го порядка $\overset{2}{\Gamma}$ имеют вид

$$\nabla^2{}_j e_i = e_{ij} + e^k_{il}\Gamma^l_{kj} + e_k\Gamma^k_{ij} + e^l_k L^k_{lij},$$

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - L^i_{jkl}\,. \qquad (10)$$

Альтернируя ковариантные производные (10), получим

$$\nabla^2_{[l}\Gamma^i_{jk]} = R^i_{jkl} + \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{js}T^s_{kl} - N^i_{jkl}\,,$$

где $N^i_{jkl} = L^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{jl]}$, причем $\Delta N^i_{jkl} \equiv -\frac{1}{2}T^s_{kl}\omega^i_{js}$.

Если $\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = 0$, то (см.: [6])

$$\overset{1}{L}{}^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl}\,, \qquad (11)$$

т. е. аффинная связность вместе со своим первым продолжением индуцирует аффинную связность 2-го порядка, причем основные компоненты ее кривизны имеют вид

$$\overset{1}{R}{}^i_{jkls} = -\Gamma^p_{jk}R^i_{pls} + \Gamma^i_{pk}R^p_{jls} + \Gamma^i_{jp}R^p_{kls}\,.$$

Ковариантные производные тензора T в связности Γ^i_{jk} являются образами горизонтальных векторов при линейном отображении, определенном дифференциалом этого тензора, т. е. $\nabla_k T = dT(\widetilde{e}_k)$, где $\widetilde{e}_k = e_k + \Gamma^i_{jk}e^j_i$. Выясним, когда выполняется аналогичное для объектов, не являющихся тензорами, а также в связности 2-го порядка, в частности

$$d\Gamma^i_{jk}(\tilde{e}_l) = \nabla^2_l \Gamma^i_{jk}\,.$$

Для левой части имеем

$$d\Gamma^i_{jk}(\tilde{e}_l) = \Gamma^i_{jkl} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \omega^i_{jk}(\tilde{e}_l)\,. \qquad (12)$$

Сравнивая выражения (10) и (12), получаем

$$\omega^i_{jk}(\tilde{e}_l) = L^i_{jkl}\,, \qquad (13)$$

т. е. формы ω^i_{jk} и горизонтальные векторы 1-го порядка $\widetilde{e}_l$ порождают объект L^i_{jkl}.

Вычислим значения форм ω^i_{jk} на горизонтальных векторах 1-го порядка $\widetilde{e}_l = e_l + e^q_p \Gamma^p_{ql}$:

$$\omega^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = W^i_{jkl}, W^i_{jkl} = x^s_{jk} x^i_{sl} - x^i_{jkl} + x^s_{jk} \Gamma^i_{sl} - x^i_{pk} \Gamma^p_{jl} - x^i_{jp} \Gamma^p_{kl}.$$

Сравнения на функции W^i_{jkl} имеют вид

$$\Delta W^i_{jkl} - \Gamma^i_{sl} \omega^s_{jk} + \Gamma^s_{jl} \omega^i_{sk} + \Gamma^s_{kl} \omega^i_{js} + \omega^i_{jkl} \equiv 0$$

и совпадают со сравнениями (7) на компоненты L^i_{jkl} связности $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, L^i_{jkl}\}$. Будем считать, что $W^i_{jkl} = L^i_{jkl}$, тогда выражение на компоненты объекта L^i_{jkl} имеет следующий вид:

$$\overset{0}{L}{}^i_{jkl} = x^s_{jk} x^i_{sl} - x^i_{jkl} + x^s_{jk} \Gamma^i_{sl} - x^i_{sk} \Gamma^s_{jl} - x^i_{js} \Gamma^s_{kl}. \qquad (14)$$

Итак, равенство (13) имеет место в связности $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$. Кроме того, если $\nabla^2_k e_i = de_i(\widetilde{e}_k)$, то L^i_{jkl} выражается по формуле (14). Назовем связность $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$ *естественной связностью 2-го порядка*.

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства естественной связности 2-го порядка* $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$.

1. *Основная кривизна естественной связности* $\overset{0}{L}{}^i_{jkl}$ *выражается по формуле*

$$\overset{0}{R}{}^i_{jkls} = x^p_{jk} R^i_{pls} - x^i_{pk} R^p_{jls} - x^i_{jp} R^p_{kls}.$$

2. *Равенство нулю ковариантных производных слоевых координат* x^i_{jk} *1-го порядка выделяет объект* $\overset{0}{L}{}^i_{jkl}$ *естественной связности 2-го порядка.*

Действительно, ковариантные производные слоевых координат x^i_{jk} выражаются по формуле

$$\nabla_l x^i_{jk} = L^i_{jkl} + x^i_{jkl} - x^s_{jk} x^i_{sl} - x^s_{jk} \Gamma^i_{sl} + x^i_{sk} \Gamma^s_{jl} + x^i_{js} \Gamma^s_{kl}$$

и их равенство нулю влечет охват $\overset{0}{L}{}^i_{jkl}$ (14).

3. *Ковариантные производные объекта* Γ^i_{jk} *и невертикальных векторов* e_i *в естественной связности* $\overset{0}{\Gamma}{}^2$ *являются образами горизонтальных векторов при линейных отображениях, определенных дифференциалами объекта* Γ^i_{jk} *и векторов* e_i*; а также образами при отображениях, определяемых горизонтальными векторами, т. е. справедливы равенства*

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk}(\widetilde{e}_l)\,,\ \nabla^2_l e_i = de_i(\widetilde{e}_l)\,;$$

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = \widetilde{e}_l(\Gamma^i_{jk})\,,\ \nabla^2_l e_i = \widetilde{e}_l(e_i)\,.$$

4. *Ковариантные производные базисных векторов 2-го порядка* $e' = \left\{e_{ij}, e^k_{ij}, e^j_{ik}, e^{jl}_{ik}\right\}$ *[2] в естественной связности* $\overset{0}{\Gamma}{}^2$ *являются образами горизонтальных векторов при линейных отображениях, определенных дифференциалами этих векторов, т. е. справедливо равенство* $\nabla^2_k e' = de'(\widetilde{e}_k)$.

5. *Формы* ω^i_{jk} *и горизонтальные векторы* $\widetilde{e}_l$ *порождают подобъект* $\overset{0}{L}{}^i_{jkl}$ *объекта естественной связности* $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$ *2-го порядка:* $\omega^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \overset{0}{L}{}^i_{jkl}$.

6. *Горизонтальные векторы* $\widetilde{e}_l$ *аннулируют формы естественной связности* $\overset{0}{\widetilde{\omega}}{}^i_{jk}$.

Действительно, вычисляя значения форм (6) на горизонтальных векторах, получим

$$\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^i_{jk}(\tilde{e}_l)=\omega^i_{jk}(\tilde{e}_l)-\overset{0}{L}{}^i_{jks}\omega^s(\tilde{e}_l)=\overset{0}{L}{}^i_{jkl}-\overset{0}{L}{}^i_{jkl}=0\,.$$

С помощью простейшей связности 1-го порядка выделим из естественной связности 2-го порядка простейшую связность 2-го порядка. Если $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=-x^i_{jk}$, то из связности $\overset{0}{L}{}^i_{jkl}$ получаем *простейшую связность 2-го порядка*

$$\overset{00}{L}{}^i_{jkl}=-x^i_{jkl}+x^i_{sk}x^s_{jl}+x^i_{js}x^s_{kl}\,.$$

Теорема 3. *Справедливы следующие свойства простейшей связности* $\overset{00}{\Gamma}{}^2=\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\overset{00}{L}{}^i_{jkl}\}$.

1. *Связность* $\overset{00}{L}{}^i_{jkl}$ *является плоской, т. е.* $\overset{00}{R}{}^i_{jkl}=0$.

Действительно, кривизна связности $\overset{00}{L}{}^i_{jkl}$ выражается по формуле $\overset{00}{R}{}^i_{jkls}=x^p_{jk}x^i_{p[ls]}-x^i_{pl}x^p_{j[ks]}-x^p_{jk}x^i_{p[ls]}-x^i_{jk[ls]}$ и равна нулю, так как слоевые координаты симметричны.

2. *В простейшей связности* $\overset{00}{\Gamma}{}^2$ *ковариантные производные объекта* $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=-x^i_{jk}$ *равны нулю, т. е.* $\overset{00}{\nabla}{}^2_l\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=0$.

3. *Образы базисных касательных векторов* $\varepsilon_i=\overset{*}{x}{}^j_i\partial_j\in T_M X_m$ *к многообразию* X_m *при отображении* ω^i_{jk} *дают объект* $\overset{00}{L}{}^i_{jkl}$, *т. е.* $\omega^i_{jk}(\varepsilon_l)=\overset{00}{L}{}^i_{jkl}$.

Действуя формами ω^i_{jk} на векторы $\varepsilon_l=\overset{*}{x}{}^j_l\partial_j$, получим

$$\omega^i_{jk}(\varepsilon_l)=x^i_{sk}x^s_{jl}+x^i_{js}x^s_{kl}-x^i_{jkl}=\overset{00}{L}{}^i_{jkl}\,.$$

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139—189.

2. *Полякова К.В.* Репер 2-го порядка расслоения касательных линейных реперов $L(X_m)$ // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы научной конференции с международным участием. Улан-Удэ, 2014. С. 22—26.

3. *Полякова К.В.* Задание аффинной связности с помощью горизонтальных векторов // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 100—112.

4. *Полякова К.В.* Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур // Там же. 2014. Вып. 45. С. 92—104.

5. *Сарданашвили Г.А.* Современные метода теории поля. Т. 5 : Гравитация. М., 2011.

6. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1991. Вып. 22. С. 117—127.

7. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Там же. 2006. Вып. 37. С. 179—187.

K. Polyakova

Special affine connection of the 1st and 2nd orders

We proceed the studying frame bundles of the 1st and 2nd orders and tangent bundles of the 1st and 2nd orders over linear frame bundle on a manifold by means of covariant method [2—4] and based on structure equations and derivation formulae. Affine connections of the 1st and 2nd orders are given by Laptev — Lumiste way. Decompositions of the 1st and 2nd orders affine connections object are obtained with the help of fibre coordinates of the same order as connection and some functions, depending on basic and fibre coordinates of the lower order then connection order. Some special connections called simplest and natural are considered; their properties are proved.