При $t^j_{kj} = 0$ говорят, что псевдофокус F^j_k уходит в бесконечность.

5. Имеем $\vec{\varepsilon}_{n+j} = \vec{e}_j - \gamma_{jk} \cdot \bar{\gamma}^{kt} \cdot \vec{e}_{n+t}$, отсюда $\bar{g}_{jj} = \gamma_{jj} + \gamma_{jk} \cdot \gamma_{js} \cdot \bar{\gamma}^{ks}$. С другой стороны, $\bar{g}_{jj} = |\vec{\varepsilon}_{n+j}|^2$. Если $\Sigma^*_n = \sigma^*_n$ -основание отображения, то $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$. Тогда

$$\bar{g}_{jj} = 1 + (\bar{\gamma}_{jj})^{-1}. \qquad (4)$$

Пусть отображение f псевдоконформно индекса k. Тогда $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \dots = \bar{\gamma}_{kk}$, и из (4) получаем, что $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \dots = \bar{g}_{kk}$, т.е. $|\vec{\varepsilon}_{n+1}| = |\vec{\varepsilon}_{n+2}| = \dots = |\vec{\varepsilon}_{n+k}|$.
Верно и обратное. Следовательно, доказана

Т е о р е м а 3. Отображение f псевдоконформно индекса k тогда и только тогда, когда в репере R^x, построенном на касательных к линиям сети σ^*_n в точке x графика, соответствующие векторы $\vec{\varepsilon}_{n+i}$ имеют равные длины.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств// Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. Т.I. С.41-51.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Итоги науки. Геометрия 1963 /ВИНИТИ. 1965. С.65-107.

3. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. Итоги науки. ВИНИТИ 1970. С.153-174.

4. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Вопросы дифференциальной геометрии: уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. Т.I. С.28-40.

5. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых n-пространств // Тезисы докл. III Межвуз. науч. конф. по проблемам геометрии. Казань. 1967. С.8.

6. Р ы ж к о в В.В. Об отображениях евклидовых пространств, обобщающих конформные // Тр. Томского ун-та. 1965. 181. С.15-18.

УДК 514.75

ОБ АЛГЕБРЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский университет)

В пространстве аффинной связности A_n задано векторное поле a^I, удовлетворяющее условию $\nabla_J \nabla_K a^I = \nabla_K \nabla_J a^I$. Рассматриваются алгебры деформации [1] $\mathcal{U}(A_n, A)$, $\mathcal{U}(A_n, B)$, ассоциированные с тензорными полями

$$a^I_{JK} = \nabla_K \nabla_J a^I, \quad b^I_{JK} = \tilde{a}^I_S a^S_{JK}, \quad \tilde{a}^I_S a^S_J = \delta^I_J, \quad a^I_J = \nabla_J a^I.$$

1. Рассмотрим пространство аффинной связности A_n нулевого кручения со структурными уравнениями

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^I = \omega^K \wedge \omega^I_K \quad (I, J, K, M = 1, \dots, n), \\ \mathcal{D}\omega^J_I - \omega^K_I \wedge \omega^J_K = \frac{1}{2} R^J_{IKM}\, \omega^K \wedge \omega^M. \end{cases} \qquad (1)$$

Задание на A_n симметричного тензора P^I_{JK} в F-модуле дифференцируемых векторных полей на A_n определяет коммутативную алгебру [1] $\mathcal{U}(A_n, P)$, ассоциированную с тензором P^I_{JK}:

$$z = P(x, y), \quad z^I = P^I_{JK}\, x^J y^K. \qquad (2)$$

Алгебру $\mathcal{U}(A_n, P)$ можно рассматривать как алгебру деформаций связностей $\nabla, \bar{\nabla}$, где ∇ -связность, определяемая формами ω^J_I, а $\bar{\nabla}$ -формами

$$\theta^J_I = \omega^J_I - P^J_{IK}\, \omega^K. \qquad (3)$$

Структурные уравнения связности $\bar{\nabla}$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^I = \omega^K \wedge \theta^I_K, \\ \mathcal{D}\theta^J_I - \theta^K_I \wedge \theta^J_K = \frac{1}{2} \bar{R}^J_{IKM}\, \omega^K \wedge \omega^M, \end{cases} \qquad (4)$$

где

$$\bar{R}^i_{jkm}=R^i_{jkm}-(P^i_{jm,k}-P^i_{jk,m})+(P^s_{jm}P^i_{sk}-P^s_{jk}P^i_{sm}), \qquad (5)$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование относительно связности ∇.

2.Зададим на A_n векторное поле a^i, для которого выполняются соотношения

$$\nabla_j a^i=a^i_j, \quad \nabla_k a^i_j=a^i_{jk}, \quad a^i_{jk}=a^i_{kj}. \qquad (6)$$

Определится алгебра $\mathcal{U}(A_n,A)$. Тогда (5) запишется в виде

$$\bar{R}^i_{jkm}=R^i_{jkm}-R^i_{skm}a^s_j+R^s_{jkm}a^i_s+(a^s_{jm}a^i_{sk}-a^s_{jk}a^i_{sm}). \qquad (7)$$

В силу (7) имеем

$$\bar{R}(x,y)z=R(x,y)z-R(x,y)\Lambda z+\Lambda R(x,y)z+(x,z,y), \qquad (8)$$

где Λ -оператор,определяемый тензором a^i_j, (x,z,y) -ассоциатор алгебры $\mathcal{U}(A_n,A)$.Из (8) вытекают следующие предложения.

Т е о р е м а I. Если A_n-плоское,то $\bar{A}_n$-плоское тогда и только тогда,когда $\mathcal{U}(A_n,A)$ ассоциативна.

Т е о р е м а 2.Пусть $\bar{A}_n$-плоское,и алгебра $\mathcal{U}(A_n,A)$ ассоциативна.Тогда,если z - собственный вектор оператора Λ,то и $R(x,y)z$ - также собственный вектор оператора Λ при любых x,y.

Т е о р е м а 3. Пусть $\bar{A}_n$- плоское и алгебра $\mathcal{U}(A_n,A)$ ассоциативна.Тогда,если z принадлежит $\operatorname{Ker}\Lambda$,то $R(x,y)z$ -собственный вектор оператора Λ при любых x,y.

Положим в (8) $y=x^2=A(x,x)$. Имеем

$$\bar{R}(x,x^2)z=R(x,x^2)z-R(x,x^2)\Lambda z+\Lambda(R(x,x^2)z)+(x,z,x^2). \qquad (9)$$

Поле $x\in\mathcal{U}(A_n,A)$ называется характеристическим [1],если

$$x^2=f\cdot x, \quad f\in F(A_n). \qquad (10)$$

Если $x\in\mathcal{U}(A_n,A)$- характеристическое,то из (9),(10) имеем

$$(x,z,x^2)=0. \qquad (11)$$

Таким образом,имеет место

Т е о р е м а 4. Если любое поле алгебры $\mathcal{U}(A_n,A)$-характеристическое,то алгебра иорданова.

В этом случае $A(x,y)$ примет вид [1]

или

$$\begin{aligned} A(x,y)&=P(x)y+P(y)x, \\ a^i_{jk}&=P_j\delta^i_k+P_k\delta^i_j, \end{aligned} \qquad (12)$$

где $P(x)=P_i x^i$ -I-форма на A_n.

Алгебра,обладающая свойством (I2),называется [2] проективной алгеброй Вейля. Формула (5) в силу (I2) примет вид

$$\bar{R}^i_{jkm}=R^i_{jkm}-(P_{j,k}+P_jP_k)\delta^i_m-(P_{m,k}-P_{k,m})\delta^i_j+(P_{j,m}+P_jP_m)\delta^i_k. \qquad (13)$$

Рассмотрим

$$a^i_{jm,k}-a^i_{jk,m}=(P_{m,k}-P_{k,m})\delta^i_j+P_{j,k}\delta^i_m-P_{j,m}\delta^i_k=R^i_{skm}a^s_j-R^s_{jkm}a^i_s. \qquad (14)$$

Откуда следует

Т е о р е м а 5. Если A_n-плоское,то $P_{[jk]}=0$. 2-нильпотентные [1] поля $x\in\mathcal{U}(A_n,A)$,определяемые условием $x^2=A(x,x)=0$, принадлежат гиперраспределению Δ_{n-1}: $P(x)=P_i x^i=0$.

Из (6),(I2) имеем

$$P_j=\frac{1}{n+1}a^i_{ij}=\frac{1}{n+1}\nabla_j H, \quad H=a^i_i, \quad x^j\nabla_j H=x^j P_j. \qquad (15)$$

Из (I5) вытекает

Т е о р е м а 6. Вдоль гиперраспределения Δ_{n-1} H-постоянно.

3.Предположим: $K=\det\|a^i_j\|\neq 0$. Определим тензорное поле

$$b^i_{jk}=\tilde{a}^i_s a^s_{jk}, \quad \tilde{a}^i_s a^s_j=\delta^i_j \qquad (16)$$

и алгебру $\mathcal{U}(A_n,B)$, для которой

$$z=B(x,y), \quad z^i=b^i_{jk}x^jy^k, \quad \Lambda B(x,y)=A(x,y). \qquad (17)$$

Дифференцируя $a^i_{jk}=a^i_s b^s_{jk}$, получим

$$b^i_{jm,k}-b^i_{jk,m}=\tilde{a}^i_s(a^s_{jm,k}-a^s_{jk,m})-(b^i_{sk}b^s_{jm}-b^i_{sm}b^s_{jk}). \qquad (18)$$

Из (5),(I8) имеем

$$\bar{\bar{R}}^i_{jkm}=2R^i_{jkm}-\tilde{a}^i_p R^p_{skm}a^s_j+2(b^i_{sk}b^s_{jm}-b^i_{sm}b^s_{jk}) \qquad (19)$$

или

$$\bar{\bar{R}}(x,y)z=2R(x,y)z-\tilde{\Lambda}(R(x,y)\Lambda z)+2\,(\overline{x,z,y}), \qquad (20)$$

где $(\overline{x,z,y})$ -ассоциатор алгебры $\mathcal{U}(A_n,B)$, $\tilde{\Lambda}=\Lambda^{-1}$. Из (20) получаем теоремы,аналогичные теоремам I,4.

Рассмотрим случай, когда $U(A_n, B)$ -проективная алгебра Вейля, т.е. $B(x,y)=\overline{P}(x)y+\overline{P}(y)x$. 2-нильпотентные поля $x\in U(A_n,B)$ определяют гиперраспределение $\overline{\Delta}_{n-1}$: $\overline{P}(x) > P_\jmath x^\jmath=0$, где

$$\overline{P}_\jmath = \frac{1}{n+1} b^{\jmath}_{\jmath\jmath} = \frac{1}{n+1}\, \tilde{a}^{\jmath}_{s}\, a^{s}_{\jmath,\jmath}\ ,$$

$$\tilde{a}^{\jmath}_{s} a^{s}_{\jmath,\jmath} = \tilde{a}^{\jmath}_{s}(\partial_\jmath a^{s}_{\jmath} - \Gamma^{p}_{\jmath\jmath} a^{s}_{p} + \Gamma^{s}_{p\jmath} a^{p}_{\jmath}) = \tilde{a}^{\jmath}_{s}\partial_\jmath a^{s}_{\jmath} = \frac{1}{K}\partial_\jmath K. \tag{21}$$

Если A_n- плоское, то из (18) имеем

$$(P_{\jmath,\varkappa} - P_\jmath P_\varkappa)\delta^{\jmath}_{M} - (P_{\jmath,M} - P_\jmath P_M)\delta^{\jmath}_{\varkappa} + (P_{M,\varkappa} - P_{\varkappa,M})\delta^{\jmath}_{\jmath} = 0. \tag{22}$$

Из (21),(22) вытекают теоремы 7,8.

Т е о р е м а 7. Вдоль гиперраспределения $\overline{\Delta}_{n-1}$ K-постоянно.

Т е о р е м а 8. Если A_n - плоское, то $P_{\jmath,M} = P_\jmath P_M$.

В этом случае $\nabla_x P_M = x^\jmath P_\jmath P_M = 0$, если $x\in \overline{\Delta}_{n-1}$.

Библиографический список

1. Nicolescu L. Courbes m-caracteristiques // Tensor. 1985. 42. N3. P. 198-203.

2. Balan V. Of deformation algebra // Bull. mat. Sos. Sci. R.S.R. 1985. 29. N4. p. 291-296.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности// Тр. геометр. семинара ВИНИТИ. Т.3. 1971. С.49-94.

4. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ. Т.9. 1979. С.7-246.

5. Кобаяси М., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М. Наука. 1981.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 19 1988

УДК 514.76

СЛАБАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕРА И РЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М.А. Ч и н а к

(Омский политехнический институт)

Исследуется поведение регулярного отображения аффинных многообразий в терминах действия этого отображения на линейных расслоениях.

Напомним, что аффинным многообразием называется неприводимое аналитическое подмножество в $\mathbb{C}^n$, которое является множеством нулей конечной совокупности полиномов [1]. Голоморфное отображение $f: M\to N$ аффинных многообразий регулярно, если оно записывается с помощью многочленов [1]. Если, кроме того, образ $f(M)$ плотен по Зарисскому в N, то f называется регулярным доминирующим отображением. Пусть кратность $\sigma(f)$ определяется как существенная верхняя грань мощностей множеств $f^{-1}(x), x\in N$. В случае, когда f-регулярное доминирующее отображение аффинных многообразий одинаковой размерности, величина $\sigma(f)$ будет конечной [1, с.74].

Для любого ненульмерного комплексного многообразия M рассмотрим элемент слабой гиперболической меры $C^M_\kappa, \kappa\in\mathbb{Z}_+$ [2]. Обозначим через V_n евклидов объем единичного шара $B_n\subset\mathbb{C}^n$.

П р е д л о ж е н и е [2,3]. Если τ -элемент объема класса $C^2(M)$ с неположительным тензором Риччи, то

$$C^M_\kappa \geqslant \frac{4^n}{\exp\left(\frac{\kappa\int_M\tau}{2^n V_n}\right)}\tau,\quad \kappa\in\mathbb{Z}_+$$

(здесь $n=\dim_{\mathbb{C}} M>0$).

Пусть $f: M\to N$ -голоморфное отображение гладких аффинных многообразий и $L\to N$ -линейное голоморфное расслоение. Обозначим через $f_L: f^*L\to L$ гомоморфизм расслоений, индуцированный отображением f. Если $\gamma\in H^0(M; \mathcal{O}(f^*L))$, то символ $Q_{f,\gamma}$ означает внутренность множества