8. *Idem.* On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra satisfying the G-cosymplectic hypersurfaces axiom // Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». 2000. T. 94. P. 91 – 96.

9. *Он же.* Две теоремы о косимплектических гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Сер. мат. 2002. №1. С. 9 – 12.

10. *Арсеньева О.Е., Кириченко В.Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Математический сборник. 1998. Т.189. №1. С. 21 – 44.

11. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465 – 504.

12. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1994. № 3. С. 6 – 13.

13. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. Vol. 24. P.127 – 132.

14. *Норден А.П.* Теория поверхностей. М.: Изд-во ГИТТЛ, 1956. 260 с.

15. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10. № 2. P. 353 – 366.

16. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: Изд-во ИИЛ, 1960. 216 с.

M. Banaru

ON KENMOTSU HYPERSURFACES IN SIX-DIMENSIONAL HERMITIAN SUBMANIFOLDS OF CAYLEY ALGEBRA

It is proved that a Kenmotsu hypersurface in a six-dimensional Hermitian submanifold of Cayley algebra is minimal if and only if its type number is equal to four. It is also proved that a Kenmotsu hypersurface in a six-dimensional Hermitian submanifold of the octave algebra cannot be totally umbilical.

УДК 514.75

О.О. Белова

(Калининградский государственный университет)

СВЯЗНОСТИ ТРЕХ ТИПОВ В РАССЛОЕНИИ НАД ОБЛАСТЬЮ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В проективном пространстве рассмотрена область, описанная точкой. Над областью возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности точки.

В этом расслоении задана фундаментально-групповая связность по Г.Ф. Лаптеву. Доказано, что оснащение Бортолотти (нормализация Нордена) рассматриваемой области индуцирует центропроективные связности трех типов в ассоциированном расслоении. Получены условия совпадения охватов и формулы, связывающие охваты трех типов. Дана геометрическая интерпретация индуцированной связности 1-го типа.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

где линейная форма θ играет роль множителя пропорциональности, а формы ω^I, ω_J^I, ω_I $(I, J, \ldots = \overline{1, n})$ проективной группы GP(n), действующей в пространстве P_n, удовлетворяют структурным уравнениям Картана:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I - \omega^K \wedge (\delta_J^I \omega_K + \delta_K^I \omega_J),\ \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \tag{2}$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим область V, описанную точкой A, т.е. многообразие Грассмана Gr(0,n). Из формул (1) видно, что точка A фиксируется в области V при ω^I=0, т.е. формы ω^I – главные. Они удовлетворяют структурным уравнениям (2_1). Внешние дифференциалы вторичных форм ω_J^I, ω_I имеют вид (2_2) и (2_3). Итак, над областью V построим главное расслоение G(V) – расслоение центропроективных реперов, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G точки A. Расслоение G(V) содержит подрасслоение линейных реперов L(V) со структурными уравнениями (2_1) и (2_2).

Зададим связность в главном расслоении G(V) способом Лаптева. Рассмотрим формы фундаментально-групповой связности в G(V):

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K,\ \ \tilde{\omega}_J = \omega_J - \Gamma_{JK} \omega^K. \tag{3}$$

Компоненты объекта связности Г={ $\Gamma_{JK}^I, \Gamma_{IJ}$ } удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma_{JK}^I - \delta_J^I \omega_K - \delta_K^I \omega_J = \Gamma_{JKL}^I \omega^L,\ \ \Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K = \Gamma_{IJK} \omega^K, \tag{4}$$

где оператор Δ действует обычным образом. Из уравнений (4) следует, что объект Г содержит простейший подобъект Γ_1={ Γ_{JK}^I } – объект линейной связности.

Структурные уравнения форм связности (3) запишем в виде

$$D\tilde{\omega}^I_J = \tilde{\omega}^K_J \wedge \tilde{\omega}^I_K + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L,\ \ D\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}^J_I \wedge \tilde{\omega}_J + R_{IJK}\omega^J \wedge \omega^K, \quad (5)$$

причем компоненты объекта кривизны R={ R^I_{JKL}, R_{IJK} } связности Г имеют следующие выражения:

$$R^I_{JKL} = \Gamma^I_{J[KL]} + \Gamma^I_{M[K}\Gamma^M_{JL]},\ \ R_{IJK} = \Gamma_{I[JK]} + \Gamma_{L[J}\Gamma^L_{IK]} \quad (6)$$

(квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам).

Продолжая дифференциальные уравнения (4), получим сравнения по модулю базисных форм ω^I:

$$\begin{aligned} &\Delta\Gamma^I_{JKL} + \Gamma^I_{JK}\omega_L + \Gamma^I_{JL}\omega_K + \Gamma^I_{LK}\omega_J - \delta^I_L\Gamma^M_{JK}\omega_{MK} \equiv 0, \\ &\Delta\Gamma_{IJK} + \Gamma^L_{IJK}\omega_L + 2\Gamma_{IJ}\omega_K + \Gamma_{IK}\omega_J + \Gamma_{KJ}\omega_I \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая сравнения (7) и равенства (6), находим дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют компоненты объекта кривизны R:

$$R^I_{JKL} \equiv 0,\ \ \Delta R_{IJK} + R^L_{IJK}\omega_L \equiv 0, \quad (8)$$

т.е. объект кривизны R является тензором, содержащим подтензор { R^I_{JKL} }.

Произведем оснащение Бортолотти [1] (нормализацию Нордена [2]) области V, которое состоит в присоединении к каждой точке A гиперплоскости P_{n-1}, не проходящей через A. Определим гиперплоскость P_{n-1} совокупностью точек $B_I = A_I + \lambda_I A$. Находя дифференциалы точек B_I и учитывая относительную инвариантность гиперплоскости P_{n-1}, получим дифференциальные уравнения компонент оснащающего объекта $\lambda = \{\lambda_I\}$:

$$\Delta\lambda_I + \omega_I = \lambda_{IJ}\omega^J. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения (4; 9) позволяют найти первый охват $\overset{1}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{JK}, \overset{01}{\Gamma}_{IJ}\}$ объекта связности Г квазитензором λ:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^I_{JK} = -\delta^I_J\lambda_K - \delta^I_K\lambda_J, \quad (10)$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{IJ} = -\lambda_I\lambda_J. \quad (11)$$

Продолжая дифференциальные уравнения (9), получим сравнения

$$\Delta\lambda_{IJ} + \lambda_I\omega_J + \lambda_J\omega_J \equiv 0. \quad (12)$$

Учитывая в уравнении (9) равенства (3), находим выражения ковариантного дифференциала объекта λ относительно групповой связности, задаваемой объектом Γ: $\nabla\lambda_I = \nabla_J\lambda_I\omega^J$, где компоненты ковариантного дифференциала имеют вид

$$\nabla\lambda_I = d\lambda_I - \lambda_J\tilde{\omega}_I^J + \tilde{\omega}_I,$$

а ковариантные производные выражаются по формулам

$$\nabla_J\lambda_I = \lambda_{IJ} + \lambda_K\Gamma_{IJ}^K - \Gamma_{IJ}. \quad (13)$$

С помощью структурных уравнений (5) находим внешние дифференциалы от компонент ковариантного дифференциала:

$$D\,\nabla\lambda_I = -\nabla\lambda_J \wedge \tilde{\omega}_I^J + T_{IJK}\omega^J \wedge \omega^K,$$

где

$$T_{IJK} = R_{IJK} - \lambda_L R_{IJK}^L. \quad (14)$$

Теорема 1. *Объект неабсолютных перенесений [3] $T=\{T_{IJK}\}$ образует тензор.*

Действительно, учитывая дифференциальные сравнения (8), получим сравнения $\Delta\,T_{IJK} \equiv 0$.

Действуя оператором Δ на ковариантные производные (13), получим, что они образуют тензор, т. е. $\Delta\nabla_J\lambda_I \equiv 0$. Приравнивая выражения (13) нулю, подставляя туда охват $\overset{0}{\Gamma}{}_{JK}^I$ (10), находим второй охват $\overset{2}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}_{JK}^I, \overset{02}{\Gamma}{}_{IJ}\}$ компонент связности Γ, где

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{IJ} = \lambda_{IJ} - 2\lambda_I\lambda_J. \quad (15)$$

Третий охват $\overset{3}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}_{JK}^I, \overset{03}{\Gamma}{}_{IJ}\}$ строим при помощи уравнений (4) и сравнений (12), тогда

$$\overset{03}{\Gamma}{}_{IJ} = -\lambda_{IJ}. \quad (16)$$

Теорема 2. *Оснащение Бортолотти (нормализация Нордена) области V индуцирует центропроективные связности трех типов в расслоении центропроективных реперов $G(V)$, ассоциированном с областью V проективного пространства P_n.*

Следствие 1. Связности трех типов совпадают тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: $\lambda_{IJ}=\lambda_J\lambda_J$.

Следствие 2. Связность 1-го типа является средней по отношению к связностям 2-го и 3-го типов, т.е. $\overset{1}{\Gamma}=\dfrac{\overset{2}{\Gamma}+\overset{3}{\Gamma}}{2}$.

Замечание. Аналогичный результат получен в статье [4].

Из формул (7; 10; 11; 14 – 16) находим выражения объекта T в рассмотренных связностях:

$$\overset{01}{T}_{IJK}=0,\ \overset{02}{T}_{IJK}=\frac{1}{2}(\lambda_{IJ}\lambda_K-\lambda_{IK}\lambda_J+\lambda_{KJ}\lambda_I-\lambda_{JK}\lambda_I),\ \overset{03}{T}_{IJK}=0.$$

Дадим геометрическую интерпретацию связности 1-го типа. Рассмотрим дифференциалы точек B_I:

$$\begin{aligned} dB_I=[\,&\delta_I^J\theta+\tilde{\omega}_I^J+(\Gamma_{IK}^J+\delta_K^J\lambda_I)\omega^K]B_J+\\ &+[\nabla\lambda_I+(\Gamma_{IJ}-\lambda_K\Gamma_{IJ}^K-\lambda_I\lambda_J)\omega^J]A. \end{aligned} \tag{17}$$

Учтем построенные охваты:

$$dB_I=(\theta-\lambda_K\omega^K)B_I+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_I^J\,B_J+\overset{01}{\nabla}\lambda_I\,A. \tag{18}$$

Теорема 3. *Гиперплоскость Бортолотти P_{n-1} в связности 1-го типа переносить параллельно нельзя.*

Доказательство. Приравнивая нулю компоненты ковариантного дифференциала $\overset{01}{\nabla}\lambda_I=0$, получим $dB_I=[\ldots]_I^J B_J$, т.е. гиперплоскость P_{n-1} остается на месте.

Теорема 4. *Подобъект линейной связности $\overset{0}{\Gamma}_1$ характеризуется центральным проектированием гиперплоскости $P_{n-1}+dP_{n-1}$, смежной с гиперплоскостью P_{n-1}, из центра A:*

$$\overset{0}{\Gamma}_1: P_{n-1}+dP_{n-1}\xrightarrow{A}P_{n-1}.$$

Доказательство следует из формулы (18), так как при проектировании из центра последнее слагаемое исчезает, а остальные существенные слагаемые определяются формами $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}_J^I$.

Теорема 5. *Связность 1-го типа принадлежит пучку [5] связностей 1-го типа.*

Доказательство. В равенстве (17) введем обозначения $l_{IJ} = \Gamma_{IJ} - \lambda_K \Gamma^K_{IJ} - \lambda_I \lambda_J$. Действуя оператором Δ, получим, что объект $l = \{l_{IJ}\}$ является тензором: $\Delta l_{IJ} \equiv 0$. Обращение в нуль тензора l определяет принадлежность групповой связности Γ пучку 1-го типа, объект которого обозначим $\overset{1}{\Gamma}$, тогда $\overset{01}{\Gamma} \in \overset{1}{\Gamma}$.

Список литературы

1. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. № 3. С. 81 – 89.
2. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.; Л., 1950.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000. 112 с.
4. *Белова О.О.* Связности трех типов в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2001. С. 3 – 5.
5. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа, индуцированный оснащением Бортолотти плоскостной поверхности // Там же. 2000. С. 35 – 38.

O. Belova

CONNECTIONS OF THREE TYPES IN THE BUNDLE OVER AREA OF THE PROJECTIVE SPACE

In the projective space the area described by a point is concidered. Over area there is a main bundle, standard fiber which one is a subgroup of a stationarity of a point. In this bundle preset fundamental-group connection on the Laptev. It is proved, that rigging of Bortolotti (the normalization of the Norden) considered area induces centerprojective connections of 3 types in associate bundle. The conditions of their coincidence are obtained. The geometrical interpretation of induced connection of 1-st type is given.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб КЦФЕ), кандидатский проект М03–2.1К–550.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт)