

М. А. Чешкова¹ 

¹ Алтайский государственный университет, Барнаул
сма@math.asu.ru, сма41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-15

Преобразование Бианки волчка Миндинга

Работа посвящена изучению преобразования Бианки для поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — волчка Миндинга, катушки Миндинга и псевдосферы (поверхности Бельтрами). Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение \sin -Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности. Построено преобразование Бианки для волчка Миндинга. Волчок Миндинга и его преобразование Бианки строятся с использованием математического пакета.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, волчок Миндинга, преобразование Бианки.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M , полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.
© Чешкова М. А., 2020

Обозначим через $k = (0,0,1)$ орт оси, а через $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \quad (1)$$

где f — дифференцируемая функция, v, u — параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M . Тогда

$$n = \frac{f'e - k}{\sqrt{(f')^2 + 1}}. \quad (2)$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}}, \quad k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}.$$

Гауссова кривизна $K = k_1k_2$ равна

$$\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3} = K.$$

Требуя $K = const$, получим два решения:

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt + c_1, \\ f(u) &= -\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2 - (c-1)}{c - Kt^2}} dt + c_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_1, c — произвольные константы.

В [1, с. 100] форма меридиана $f = f(u)$ исследована без использования вычисления эллиптического интеграла. Мы построим данные поверхности, используя математический пакет.

Рассмотрим случай, когда $K < 0$, $c = a^2 < 1$. Для определенности полагаем $K = -1$. Из (3) имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{-t^2 - a^2 + 1}{a^2 + t^2}} dt + c_1.$$

При $0 < c < 1$ имеем волчок Миндинга.

Требую, чтобы $1 - c - u^2 > 0$, получим $u \in [-\sqrt{1-c}, 0]$.

Полагая $c = \frac{1}{4}$, с использованием математического пакета находим решение (3).

Имеем

$$f(u) = \pm(2\text{EllipticF}(\frac{2u\sqrt{3}}{3}\sqrt{3i}) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}(\frac{2u\sqrt{3}}{3}\sqrt{3i})) + C,$$

$$f'(u) = \pm \frac{\sqrt{\frac{3}{4} - u^2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + u^2}}.$$

Выбираем знак плюс и $C = 0$.

Введем обозначение

$$b = f(-\sqrt{1-c}) = -2\text{EllipticK}(\sqrt{3i}) + 1/2\text{EllipticE}(\sqrt{3i})$$

и рассмотрим поверхности

$$V1 : r(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u)),$$

$$V2 : r(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), -f(u) + 2b),$$

$$V3 : r(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), -f(u)),$$

$$V4 : r(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u) - 2b),$$

$$u \in [-\sqrt{\frac{3}{4}}, 0], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

Эта поверхность называется волчком Миндинга.

Построим волчок Миндинга (4 секции) (рис. 1).

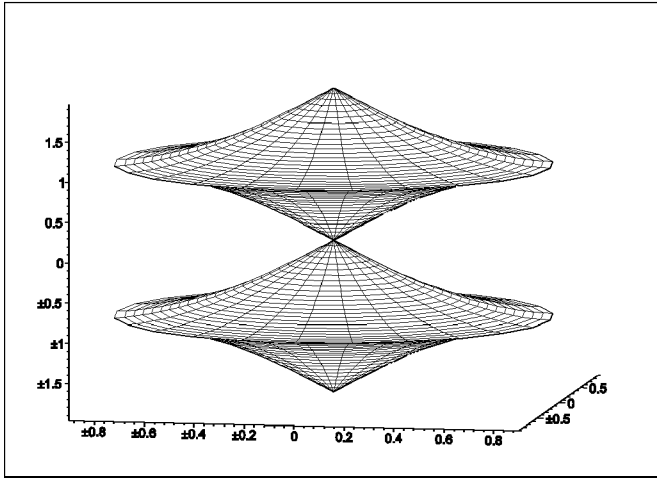


Рис. 1. Волчок Миндинга (4 секции)

Рассмотрим две гладкие поверхности M, \bar{M} и диффеоморфизм $f : M \rightarrow \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $pf(p) = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности \bar{M} в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид

$$T_{f(p)}\bar{M} = (f(p), n, V).$$

Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность \bar{M} имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M , а через R — радиус-вектор поверхности \bar{M} . Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f : M \rightarrow \bar{M}$ [2, с. 489]. Имеем

$$R = r - V.$$

Из условия $\langle R_i[n, V] \rangle = 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $\langle V, V \rangle = 1, \langle \partial_i V, V \rangle = 0$, то

$$\omega(r_i) = \langle r_i, V \rangle, \quad \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_1 V^1 &= 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2, \\ \nabla_2 V^1 &= -g_{22}V^1V^2, \quad \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2, \\ V &= V^i r_i, \quad g_{ij} = \langle r_i, r_j \rangle, \quad r_1 = \partial_u r, \quad r_2 = \partial_v r. \end{aligned} \quad (4)$$

Следуя Миндингу [3, с. 175], введем обозначение

$$u = ash(t), \quad a = \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \int \sqrt{1 - \frac{1}{4}ch^2(t)} dt, \\ f(t) &= 2\text{EllipticF}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}sh(t), \sqrt{3}i\right) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}sh(t), \sqrt{3}i\right), \\ r &= \frac{1}{2}sh(t)e(v) + f(t)k, \quad r_1 = \frac{1}{2}ch(t)e(v) + \sqrt{1 - \frac{1}{4}ch^2(t)}k, \\ r_2 &= \frac{1}{2}sh(t)e'(v), \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \frac{1}{4}sh^2(t). \end{aligned}$$

Определим символы Кристоффеля

$$\Gamma_{22}^1 = -1/4 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t), \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \operatorname{cth}(t), \quad \operatorname{cth}(t) = \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)}.$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю. Формулы (4) примут вид

$$\partial_t V^1 = 1 - (V^1)^2, \quad (5.1)$$

$$\partial_t V^2 + \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} V^2 = -V^1 V^2, \quad (5.2)$$

$$\partial_v V^1 - \frac{1}{4} \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) V^2 = -\frac{1}{4} 4 \operatorname{sh}^2(t) V^1 V^2, \quad (5.3)$$

$$\partial_v V^2 + \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} V^1 = 1 - \frac{1}{4} \operatorname{sh}^2(t) (V^2)^2. \quad (5.4)$$

Чтобы определить решение, рассмотрим равенства (5.1), (5.3).
Имеем

$$V^1 = \operatorname{th}(t + F(v)), \quad V^2 = \frac{-4 \partial_v F(v) \operatorname{th}(t + F(v))^2 + 4 \partial_v F(v) / \operatorname{sh}(t)}{-\operatorname{th}(t + F(v)) \operatorname{sh}(t) + \operatorname{ch}(t)}.$$

Потребуем, чтобы $\langle V, V \rangle = 1$. Тогда

$$(1^*): F(v) = \pm t + \operatorname{arcth} \frac{e^4 - 1}{1 + e^4 - 2e^2},$$

$$(2^*): F(v) = \ln(\pm \operatorname{tg}(C/4 - v/4)), \quad C = \operatorname{const}.$$

Если выполняется (1*), то $V^2 = 0, V = r_1$. Нормаль к поверхности \bar{M} имеет вид $\bar{n} = [n, V] = r_2 / |r_2| = e'(v)$. Тогда $\partial_t e'(v) = 0$, поверхность \bar{M} вырожденная. Остается случай (2*).

Имеем

$$V^1 = \frac{(e^{2t} + 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}}{(e^{2t} - 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}}, \quad (6)$$

$$V^2 = \pm \frac{8 e^{2t} \sin(C/4 - v/4) \cos(C/4 - v/4)}{((e^{2t} - 1) \cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t})},$$

$$\bar{M} : R(u, v) = \frac{1}{2} sh(t)e(v) + f(t)k - V^1 r_1 - V^2 r_2. \quad (7)$$

Равенства (5.2), (5.4) в силу (6) выполняются.

При $1 - \frac{1}{4}ch^2(t) > 0$ имеем $t \in [0, arcch(2)]$.

Построим преобразования Бианки волчка Миндинга (7) (рис. 2).

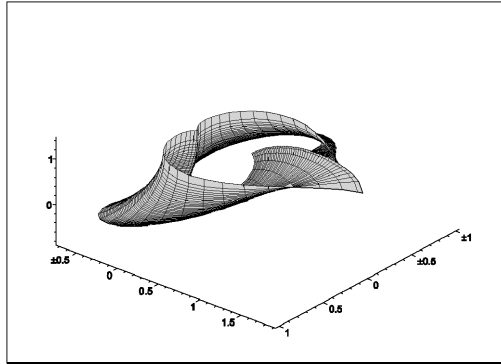


Рис. 2. Преобразования Бианки волчка Миндинга

При этом мы выбрали V^2 со знаком плюс при $C = \pi$, $t \in [0, arcch(2)]$, $v \in [-2\pi, 2\pi]$.

Список литературы

1. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М. ; Л., 1948. Ч. 2.
2. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.
3. Норден А. П. Об основаниях геометрии. М., 1956.

M. A. Cheshkova¹ 

¹ Altai State University

61 Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia

cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-15

Transformation of Bianchi for Minding Top

Submitted on May 8, 2020

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of revolution of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minding top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the Minding top is constructed. Using a mathematical package, Minding's top and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, Minding top, Bianchi transform.

References

1. *Kagan, V.F.*: Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition. Part 2, Moscow, Leningrad (1948).
2. *Shulikovskiy, V.I.*: Classical differential geometry in tensor exposition. Moscow (1963).
3. *Norden, A.P.*: On the foundations of geometry. Moscow (1956).