УДК 514.763.8

Л.В. С т е п а н о в а, М.Б. Б а н а р у

(Смоленский военный университет)

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КВАЗИКЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Важнейшим примером почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющим их роль в дифференциальной геометрии, служат структуры, индуцируемые на гиперповерхностях почти эрмитова многообразия. Изучением названных структур занимались такие известные геометры как Блэр, Голдберг, Сасаки и другие. Исследуется случай, когда на ориентируемой гиперповерхности квазикелерова многообразия индуцируется квазисасакиева структура.

1. Пусть $\{M^{2n}, J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ 2n-мерное почти эрмитово многообразие, где J-оператор почти комплексной структуры, g- риманова метрика на M , $J^2=-id$, $\langle JX,JY\rangle=\langle X,Y\rangle$; здесь $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Напомним [1], что почти эрмитова структура $\langle J,g\rangle$ на многообразии M называется келеровой, если $\nabla J=0$, приближенно келеровой - если $\nabla_X(J)Y=0$, квазикелеровой - если $\nabla_X(J)Y+\nabla_{JX}JY=0$. Под контактной метрической структурой на многообразии N понимается система $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ тензорных полей на этом многообразии, где ξ-векторное, η- ковекторное , Φ-тензор типа (1,1) , g-риманова метрика на N. При этом

$$\eta(\xi)=1\ ,\Phi(\xi)=0,\ \eta\circ\Phi=0,\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X),\ \eta(Y),\ X,Y\in\mathfrak{X}(N).$$

Тензор Нейенхейса оператора Φ имеет вид :

$$N_\phi(X,Y)=\Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y].$$

Почти контактная метрическая структура называется квазисасакиевой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется условие

$$N_\phi+\frac{1}{2}d\eta\otimes d\xi=0\ .$$

Для квазисасакиева многообразия N можно ввести в рассмотрение линейный оператор $B:\mathfrak{X}(N).\to\mathfrak{X}(N)$, определяемый формулами

$$B(X)=\Delta_X\xi,\quad B(X,Y)=\langle B(X),Y\rangle.$$

2. Пусть M^{2n}-квазикелерово многообразие, N^{2n-1}-ориентируемая гиперповерхность M^{2n}, σ- вторая квадратичная форма погружения N поверхности квазикелерова многообразия имеет вид:

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b+B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+i\sigma^a_b\,\omega^b\wedge\omega+(-\sqrt{2}\,\bar{B}^{nab}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{B}^{abn}+i\sigma^{ab})\,\omega_b\wedge\omega,$$

$$d\omega_a=-\omega^b_a\wedge\omega_b+B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c-i\sigma^b_a\,\omega_b\wedge\omega+(-\sqrt{2}\,\bar{B}_{nab}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{B}_{abn}-i\sigma_{ab})\,\omega^b\wedge\omega, \qquad (1)$$

$$d\omega=\sqrt{2}\,B_{nab}\omega^a\wedge\omega^b+\sqrt{2}\,B^{nab}\omega_a\wedge\omega_b-2i\sigma^a_b\,\omega^b\wedge\omega_a+(\bar{B}_{nbn}+i\sigma_{nb})\omega\wedge\omega^b+$$
$$+(\bar{B}^{nbn}-i\sigma^b_n)\,\omega\wedge\omega_b.$$

Здесь a,b,c=1,...,n-1; $B^{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\alpha\beta\gamma}$- структурные тензоры Кириченко [3], связанные соотношениями

$$B^{\alpha\beta\gamma}=\overline{B}_{\alpha\beta\gamma},\ B^{\alpha\beta\gamma}=-B^{\alpha[\beta\gamma]},\quad \alpha,\beta,\gamma=1,...,n.$$

Первая группа структурных уравнений квазисасакиева многообразия имеет вид :

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b+B^a_b\,\omega\wedge\omega^b;\ d\omega_a=-\omega^b_a\wedge\omega_b-B^b_a\,\omega\wedge\omega_b;\ d\omega=2B^a_b\,\omega^b\wedge\omega_a, \tag{2}$$

где $\overline{B}^a_b=-B^b_a$. Сопоставляя (1) и (2), получаем необходимые и достаточные условия , при которых на N индуцируется квазисасакиева структура:

$$B^{abc}=0,\ B^{nab}=0,\ B^{abn}=0,\ \sigma^a_b=iB^a_b,\ \sigma^b_n=iB^{nbn},\ \sigma^{ab}=i\sqrt{2}\,B^{nab} \tag{3}$$

и формулы комплексно сопряженные /ф.к.с./.

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура, индуцируемая на ориентируемой гиперповерхности N квазикелерова многообразия M, будет квазисасакиевой тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$\sigma(X,Y)=h\eta(X)\,\eta(Y)+B(X,\Phi Y)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\eta(\nabla_{\Phi X}(J)(\Phi X)-\nabla_{\Phi^2X}(J)(\Phi^2X)+$$

$$+\frac{1}{2}(\eta(X)\,\eta\nabla_{\xi}(J)(\Phi^2Y))+\eta(Y)\,\eta(\nabla_{\xi}(J)(\Phi^2X)),$$

$$\nabla_{\Phi X}(J)(\Phi Y)-\nabla_{\Phi^2X}(J)(\Phi^2Y)=\nabla_{\Phi Y}(J)(\Phi X)-\nabla_{\Phi^2Y}(J)(\Phi^2X),$$

$$\nabla_{\xi}(J)(\Phi X)=-2\sigma(\xi,\Phi X)\xi,$$

где $X,Y\in\chi(M)$, $h=\sigma(\xi,\xi)$.

Эта теорема обобщает известный результат Голдберга [4] о структурах, индуцированных на гиперповерхностях келерова многообразия.

3. Определение. Гиперповерхность $N\subset M$ называется η-квазиомбилической, если ее вторая квадратичная форма σ имеет вид:

$$\sigma(X,Y)=\lambda(X,Y)+h\eta(X)\,\eta(Y),\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \lambda=\text{const}.$$

Если при этом $h=0$, то гиперповерхность $N\subset M$ называется омбилической, если $h=0$ и $\lambda=0$, т.е. $\sigma(X,Y)=0$, то - вполне геодезической.

Теорема 2. *Пусть M – квазикелерово многообразие, через каждую точку которого проходит η-квазиомбилическая гиперповерхность N, на которой индуцируется квазисасакиева структура. Тогда M – келерово многообразие, а структура, индуцированная на N, либо является косимплектической, либо гомотетична сасакиевой . При этом структура будет косимплектической в том и только в том случае, если $\sigma=h\eta\otimes\eta$.*

Доказательство. Так как N - η-квазиомбилическая гиперповерхность многообразия M, то

$$\sigma(X,Y)=\lambda(X,Y)+h\eta(X)\,\eta(Y).$$

Используя последнее равенство, выпишем некоторые компоненты второй квадратичной формы:

$$\sigma^{ab}=0,\ \sigma^b_n=0,\ \sigma_{nn}=h. \tag{4}$$

Так как на N индуцируется квазисасакиева структура, то выполняются условия (3). С учетом (4) они примут вид:

$$B^{abc}=0,\ B^{nab}=0,\ \hat{A}^{abn}=0,\ \hat{A}^{nab}=0,\ \hat{A}^{nbn}=0,\ B^a_b=-i\lambda\delta^a_b.$$

Из того, что $\hat{A}^{nab}=0$, следует равенство $B^{abn}=0$. Аналогично, так как $\hat{A}^{nbn}=0$, то $B^{nnb}=0$. Таким образом, в каждой точке $p\in M$ выполняется равенство $B^{\alpha\beta\gamma}=0$. Следовательно, M- келерово многообразие. Кроме того, поскольку $B^a_b = -i\lambda\delta^a_b$, то структура, индуцированная на N, гомотетична сасакиевой. Если при этом $\lambda=0$, то структура, индуцированная на N, является косимплектической. Это утверждение равносильно равенству

$$\sigma(X,Y) = h\eta(X)\,\eta(Y), \quad X,Y\in\mathfrak{X}(N),$$

т.е. $\sigma=h\eta\otimes\eta$.

Обратно: если $\sigma=h\eta\otimes\eta$, то $\lambda=0$, т.е. $B^a_b=0$ и структура , индуцированная на N, является косимплектической .

Данная теорема обобщает известный результат Сасаки [5] о вполне омбилических гиперповерхностях комплексного евклидова пространства.

4. Пусть M^{2n}, в частности, является приближенно келеровым многообразием , т.е. таким квазикелеровым многообразием, у которого структурные тензоры I и II рода кососимметричны по всем парам индексов. И пусть на ориентируемой гиперповерхности $N^{2n-1}\subset M^{2n}$ индуцируется квазисасакиева структура. Тогда условия (3) примут вид :

$$B^{abc}=0,\ B^{nab}=0,\ \sigma^{ab}=0,\ \sigma^b_n=0,\ \sigma^b_a= iB^b_a$$

и ф.к.с. Эти условия являются необходимыми и достаточными для того , чтобы на ориентируемой гиперповерхности N квазикелерова многообразия M индуцировалась квазисасакиева структура. Записав полученные условия в безындексной форме, получаем следующий результат:

Теорема 3. *На ориентируемой гиперповерхности N приближенно келерова многообразия M квазисасакиева структура индуцируется в том и только в том случае, если 1) M - келерово многообразие и 2)* $\sigma=h\eta(X)\eta(Y)+B(X,\Phi X),\ X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Следствие. На гиперповерхности N приближенно келерова многообразия M косимплектическая структура индуцируется тогда и только тогда, когда 1) M- келерово многообразие и 2) $\sigma=h\eta\otimes\eta$.

Данное следствие обобщает результат Голдберга [4] о косимплектических поверхностях келерова многообразия.

Библиографический список

1. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. 1980. V. 123. № 4. P. 35-58.

2. *Степанова Л. В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: Дис.... канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 1995.

3. *Банару М. Б.* О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав // Полианалитические функции: граничные свойства и краевые задачи. Смоленск, 1997.

4. *Goldberg S.* Totally geodesic hypersurfaces of Kähler manifolds. Pacif. J. Math. 1968. V. 27. №2. P. 275-281.

5. *Sasaki S.* Almost contact manifolds // Lect. Notes. V.1; 1965. V.2;1967.

L.V. S t e p a n o v a, M.B. B a n a r u

ON HYPERSURFACES OF QUASIKAHLERIAN MANIFOLDS

Most important example of almost contact metric structures, determining their in the differential geometry to a great extent, is structures, induced on the hypersurface of almost hermitean manifolds. Above mentioned structures were studied such distinguished geometrician as Bler, Goldberg, Sasaki et setera. The case is investigated when on the orientable hipersurface of quasi-kählerian manifolds quasi-sasakian structura - is induced.

УДК 514.75

А.В. С т о л я р о в

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ И СЕТИ НА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ

Исследуется внутренняя геометрия сетей, заданных на регулярной гиперполосе H_m, относительно аффинных связностей, индуцируемых при нормализации подмногообразия H_m. Основные результаты работы доложены на конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”, посвященной 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова [8].

Индексы принимают следующие значения: $i, j, k, l, s, t = \overline{1, m}$.

Рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [1], погруженную в n-мерное проективное пространство P_n ($m < n - 1$) и нормализованную в смысле Нордена-Чакмазяна [3], [10] полями квазитензоров v_n^i и v_i^0 [9]. А.В. Чакмазян показал [10], что на нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset P_n$ индуцируются две двойственные симметрические аффинные связности $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ (первого и второго родов); но следует заметить, что геометрия этих связностей им исследована довольно слабо. В работах [4], [6], нами получен ряд результатов по изучению геометрии связностей $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$: