ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Е.А.Хляпова

О ПАРАХ КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНИКОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются пары, образованные конгруэнцией (F_1) центральных коник F_1 и поверхностью (F_2), описанной точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1, причем касательная плоскость поверхности (F_2) не параллельна плоскости коники F_1. В работе исследуются пары P поверхность (F_2) которых является квадрикой и все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат этой квадрике. Выделены ассоциированные коники $C_{n,m,k}$ и доказано, что коника $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированы) конгруэнции $(C_{n,m,k})$ может иметь либо все свои точки фокальными, либо не более четырех фокальных точек. Подробно исследован подкласс пар P.

§ I. Система уравнений Пфаффа пары P

Канонический репер $R=\{A,\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ пары P как и в[I] строим следующим образом: вершину A репера совмещаем с точкой F_2 концы E_α векторов $\bar e_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ располагаем на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C -центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1, а прямая E_1E_2 параллельна линии пересечения касательной плоскости поверхности (A) и плоскости коники F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A=\omega^\alpha \bar e_\alpha, \qquad d\bar e_\alpha=\omega_\alpha^\beta \bar e_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha, \qquad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

Относительно построенного репера уравнения коники F_1 имеют вид:

$$2\left(x^1-\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(x^2-\tfrac{1}{2}\right)^2=1, \qquad x^1+x^2+x^3=1. \tag{3}$$

Так как точка A описывает квадрику, которой принадлежат все коники F_1 конгруэнции (F_1), то уравнение квадрики запишется в виде:

$$a(x^1)^2+a(x^2)^2-2(1+b)x^1x^2-bx^1x^2-bx^2x^3+(x^3)^2-a(x^1+x^2)-x^3=0. \tag{4}$$

Причем имеют место соотношения:

$$\omega^3=-a(\omega^1+\omega^2),$$

$$da-2a\omega_1^1+2(1+b)\omega_1^2+b\omega_1^3-a(b\omega_3^1+b\omega_3^2-2\omega_3^3)=0,$$

$$db-b(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3)+2\omega_1^3+(2a-b^2)\omega_3^1-(2+2b+b^2)\omega_3^2=0,$$

$$b(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2-\omega_2^1)-2(\omega_1^3-\omega_2^3)-2(a+b+1)(\omega_3^1-\omega_3^2)=0,$$

$$2a(\omega_1^1-\omega_2^2)+2(1+b)(\omega_2^1-\omega_1^2)-b(\omega_1^3-\omega_2^3)=0,$$

$$(a+b)(\omega_3^1+\omega_3^2)+(2a+b)(\omega^1+\omega^2)-\omega_3^3=0,$$

$$a(\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_1^2-\omega_2^1)+\omega_1^3-\omega_2^3-2(a+b+1)(\omega^1-\omega^2)=0,$$

$$a\omega_1^1-(a+2b+2)\omega_1^2-(b+1)\omega_1^3+a(b+2)\omega^1-(2b-ab+2)\omega^2=0,$$

$$2\omega_1^1-2(a+b)\omega_1^2-2a\omega_2^1+2(b+1)\omega_2^2+(b+4)\omega_1^3+b\omega_2^3+$$

$$+2(2a+b)\omega_3^1-2(2+b)(\omega_3^2+\omega_3^3)=0.$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности касательной плоскости поверхности (A) в точке A вектору $\bar{e}_3$, примем главные формы $\omega^i (i=1,2)$ за независимые.

Система уравнений Пфаффа пары P состоит из уравнений (5) и следующих уравнений

$$\omega_1^1=\mu_i\omega^i, \quad \omega_2^2=\eta_i\omega^i, \quad \omega_3^3=\vartheta_i\omega^i. \qquad (6)$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что пары P существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Через $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированные числа) обозначим конику с центром в точке

$$\bar{M}_{n,m,k}=\bar{A}+n\bar{e}_1+m\bar{e}_2+(k-n-m)\bar{e}_3,$$

полученную из коники F_1 сдвигом пространства A_n определяемым вектором $\overline{CM}_{n,m,k}$ и через α_k плоскость, которой принадлежит коника $C_{n,m,k}$.

Уравнения коники $C_{n,m,k}$ запишутся в виде:

$$2(x^1-n)^2+2(x^2-m)^2=1, \quad x^1+x^2+x^3=k \qquad (7)$$

Так как для каждой коники (3) однозначно определяется плоскость α_k и коника $C_{n,m,k}$, то и плоскости α_k и коники $C_{n,m,k}$ (n,m,k -фиксированные числа) образуют двупараметрические семейства.

Т е о р е м а I. Если конгруэнция $(C_{n,m,k})$ коник $C_{n,m,k}$ не является конгруэнцией с неопределенными фокальными поверхностями и неопределенными фокальными семействами, то коника $C_{n,m,k}$ конгруэнции $(C_{n,m,k})$ имеет не более четырех фокальных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $C_{n,m,k}$ определяются из системы уравнений (7) и уравнений:

$$(x^1)^2(\omega_1^1-\omega_3^1)+(x^2)^2(\omega_2^2-\omega_3^2)+x^1x^2(\omega_2^1-\omega_3^1+\omega_1^2-\omega_3^2)+$$

$$x^1[\omega^1+k\omega_3^1-n(\omega_1^1-\omega_3^1)-m(\omega_1^2-\omega_3^2)]+x^2[\omega^2+k\omega_3^2-$$

$$-n(\omega_2^1-\omega_3^1)-m(\omega_2^2-\omega_3^2)]-n\omega^1-m\omega^2=0,$$

$$x^i(\omega_i^1+\omega_i^2+\omega_i^3)-(x^1+x^2)\Omega+\omega^1+\omega^2+\omega^3+k\Omega=0,$$

где

$$\Omega=\omega_3^1+\omega_3^2+\omega_3^3.$$

Коника $C_{n,m,k}$ при $n=m=\frac{1}{2}, k=1$ есть коника F_1, любая точка которой является фокальной, т.к. все коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат квадрике (A) [2].

Раскладывая все формы Пфаффа по независимым и исключая

ω^1 и ω^2 из уравнений системы (8), получим уравнение третьей степени относительно x^1, x^2, при $n=m=\frac{1}{2}$, $\kappa=1$ коэффициенты этого уравнения будут пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения системы (7), поэтому коэффициенты при $(x^1)^3, (x^2)^3, (x^1)^2 x^2, x^1(x^2)^2$ обращаются в ноль, а они как видно из (8) не будут зависеть от n, m, κ т.е. обращаются в ноль при любых n, m, κ

Следовательно, фокальные точки коники $C_{n,m,\kappa}$ будут определяться системой уравнений (7) и уравнением второй степени относительно x^1, x^2 полученным из (8) исключением ω^1 и ω^2.

§ 2. Пары P_1

О п р е д е л е н и е. Пара P называется парой P_1, если центр квадрики (A) совпадает с центром C коники F_1 и точка E_3 делит пополам отрезок, заключенный между точкой C и точкой пересечения диаметра CE_3 коники F_1 с касательной плоскостью поверхности (A) в точке A.

Аналитически условия, выделяющие пары P_1 из пар P, выражаются следующим образом:

$$a=2, \quad b=-1.$$

Учитывая их в (5) и (6), запишем систему уравнений Пфаффа пары P_1 в виде:

$$\omega^3=-2(\omega^1+\omega^2), \quad \omega_1^1=\mu_i\omega^i, \quad \omega_1^2=\omega^1-\omega^2+\omega_1^1,$$

$$\omega_1^3=-4\omega_1^1, \quad \omega_2^1=-2\omega^1-\omega_1^1, \quad \omega_2^2=-\omega^1-\omega^2-\omega_1^1,$$

$$\omega_2^3=4(\omega^1+\omega^2+\omega_1^1), \quad 2\omega_3^1=-\omega^1+3\omega_1^1, \qquad (9)$$

$$2\omega_3^2=-3\omega^1-4\omega^2-3\omega_1^1, \quad \omega_3^3=\omega^1+\omega^2.$$

Анализируя систему уравнений (9), убеждаемся, что пары P_1 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Обозначим через M_κ характеристическую точку плоскости α_κ, а конику $C_{n,m,\kappa}$, имеющую центр в точке M_κ, назовем характеристической коникой плоскости α_κ.

Т е о р е м а 2. При любом κ прямая, соединяющая характеристическую точку M_κ плоскости α_κ с цетром C квадрики (A), параллельна вектору

$$\bar{E}=\bar{e}_1+\bar{e}_2+2\bar{e}_3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы, определяющие точки M_κ, C и вектор $\overline{CM_\kappa}$ имеют соответственно вид:

$$\bar{M}_\kappa=\bar{A}+\frac{\kappa+1}{4}(\bar{e}_1+\bar{e}_2)+\frac{\kappa-1}{2}\bar{e}_3,$$

$$\bar{C}=\bar{A}+\frac{1}{2}(\bar{e}_1+\bar{e}_2),$$

$$\overline{CM_\kappa}=\frac{\kappa-1}{4}(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Коника $C_{n,m,\kappa}$ конгруэнции $(C_{n,m,\kappa})$ имеет неопределенные фокальные точки тогда и только тогда, когда она является характеристической коникой плоскости α_κ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $C_{n,m,\kappa}$ определяются из уравнений (7) и уравнения

$$(x^1)^2(1-4m+k)(\mu_1-5\mu_2-1)+(x^2)^2(1-4n+k)(-5\mu_1+\mu_2-3)+$$

$$+x^1x^2\left[4(1+k)(\mu_1+\mu_2+1)+4n(\mu_1-5\mu_2-1)+4m(-5\mu_1+\mu_2-3)\right]+$$

$$+x^1\{\mu_1[-n+m+k(-3-n+13m-3k)]+\mu_2[5n-5m+k(3+5n-17m+3k)]-$$

$$-2+n+7m+k(-1+n-5m+k)\}+x^2\{\mu_1[-5n+5m+k(3-17n+5m+3k)]+$$

$$+\mu_2[n-m+k(-3+13n-m-3k)]+2-11n+3m+k(1+n+3m-k)\}+$$

$$+(n-m)\left[2+k-k^2+3k(1+k)(\mu_1-\mu_2)\right]=0. \qquad (11)$$

Если фокальные точки коники $C_{n,m,k}$ неопределенны, то коэффициенты уравнения (II) должны быть пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения системы (7). А это будет только в случае, если

$$n=m=\frac{1+k}{4}, \qquad (12)$$

т.е. если коника $C_{n,m,k}$ является характеристической коникой плоскости α_k. Наоборот, при выполнении условий (I2), уравнение (II) обращается в тождество. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Точки $K'_{n,k}$ и $K''_{n,k}$ пересечения коники $C_{n,n,k}$ конгруэнции $(C_{n,n,k})$ с диаметром, параллельным $\overline{CE_3}$ являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы, определяющие точки $K'_{n,k}$ и $K''_{n,k}$ записываются в виде:

$$\overline{K}'_{n,k}=\overline{A}+\frac{2n+1}{2}(\overline{e}_1+\overline{e}_2)+(k-1-2n)\overline{e}_3,$$

$$\overline{K}''_{n,k}=\overline{A}+\frac{2n-1}{2}(\overline{e}_1+\overline{e}_2)+(k-2n+1)\overline{e}_3.$$

Подставляя координаты этих точек в уравнение (II) при $n=m$, убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

Т е о р е м а 5. Пары P_1 обладают следующими свойствами: I/ прямая, соединяющая характеристические точки граней $(A\overline{e}_i\overline{e}_3)$ параллельна диаметру E_1E_2 коники F_1, 2/ середины отрезков AE_α являются фокусами ребер AE_α конгруэнций (AE_α), а плоскость, проходящая через оставшиеся фокусы ребер AE_α, инцидентна центру C коники F_1, 3/ прямолинейные конгруэнции (AE_i) имеют по одному семейству соответствующих торсов, 4/ точка E_i описывает линию тогда и только тогда, когда прямолинейная конгруэнция (AE_3) и конгруэнция координатных плоскостей $(A\overline{e}_1\overline{e}_2)$ односторонне аффинно расслояемы [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/ Характеристические точки граней $(A\overline{e}_1\overline{e}_3),(A\overline{e}_2\overline{e}_3)$ определяются формулами

$$\overline{M}_1=\overline{A}+\frac{3}{7}\overline{e}_1+\frac{2}{7}\overline{e}_3,\quad \overline{M}_2=\overline{A}+\frac{3}{7}\overline{e}_2+\frac{2}{7}\overline{e}_3.$$

Следовательно, вектор $\overline{M_1M_2}(-\frac{3}{7},\frac{3}{7},0)$ параллелен диаметру E_1E_2.

2/ Фокусы F'_α, F''_α ребер AE_α конгруэнций (AE_α) задаются формулами:

$$\overline{F}'_1=\overline{A}+\frac{1}{2}\overline{e}_1,\quad \overline{F}''_1=\overline{A}-\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\overline{e}_1;$$

$$\overline{F}'_2=\overline{A}+\frac{1}{2}\overline{e}_2,\quad \overline{F}''_2=\overline{A}+\frac{1}{2+\mu_1+\mu_2}\overline{e}_2;$$

$$\overline{F}'_3 = \overline{A} + \frac{1}{2}\overline{e}_3, \quad \overline{F}'' = \overline{A} + \frac{2}{1-3\mu_1+3\mu_2}\overline{e}_3 .$$

Легко убедиться, что векторы $\overline{CF}''_1, \overline{CF}''_2, \overline{CF}''_3$ компланарны.

3/ Уравнения торсов прямолинейных конгруэнций $(AE_1), (AE_2)$ имеют вид:

$$(\omega^1 - \omega^2)\omega_2^2 = 0, \quad (\omega^1 - \omega^2)\omega_1^1 = 0 .$$

4/ Касательная плоскость поверхности (E_i) определяется точкой E_i и векторами

$$\overline{E}'_i = (1+\mu)(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) - 2(1+2\mu_1)\overline{e}_3 ,$$

$$\overline{E}''_i = \mu_2(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) - (1+2\mu_2)\overline{e}_3$$

Если точка E_i описывает линию, то векторы $\overline{E}'_i$ и $\overline{E}''_i$ коллинеарны, т.е.

$$\mu_1 + \mu_2 + 1 = 0. \qquad (13)$$

Условие (13) является в то же время условием одностороннего аффинного расслоения прямолинейной конгруэнции (AE_3) и конгуэнции плоскостей $(A\overline{e}_1\overline{e}_2)$. Теорема доказана.

Список литературы.

1. Х л я п о в а Е.А. Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных центральной коникой и точкой. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4. Калининград 1974, с. 186–192.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. – В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1972, т. 10, с. 113–157. (М., ВИНИТИ АН СССР)

3. Т к а ч Г.П. О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с. 143–152.