9. Ehresmann C. Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable // Colloque de Topologie . Bruxelles, 1950 . P. 29-55.

10. Близникас В.И. О геометрии некоторых классов оснащенных расслоенных пространств: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Вильнюс, 1970. 339 с.

11. Лаптев Г.Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. 3-го Всесоюз. Мат. съезда. М., 1958 Т. 3. С. 409-418.

12. Шевченко Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1991. Вып. 22 . С.117-127.

13. Лемлейн В.Г. Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Литовский мат. сб. 1964. Т. 4. N1. С. 41-132.

14. Шевченко Ю.И. Связности голономных и неголономных центропроективных многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып. 27. С.122-135.

Yu.I. S h e v c h e n k o

EXAMPLES OF NONHOLONOMIC SMOOTH MANIFOLDS

Holonomic and nonholonomic shmooth manifolds are defined depending on the completeness of differentials of elements of the moving frame of the manifold. Formulas are obtained, showing the equivalence of the completeness of these differentials and the symmetry of base vectors of tangent spaces of higher orders.

With the purpose of existence proof of nonholonomic smooth manifolds their examples are brought: 1) Lie group and parallelizable manifold; 2) main fibering, fiberings of Lie groups and parallelizable manifolds; 3) space of geometric connection as a special case of composite manifold; 4) space of grouped connection as a special main fibering; 5) generalizations of space of grouped connection i.e. fiberings of Lie groups and parallelizable manifolds with connections; 6) spaces of linear (affine) and centroproective connection.

Spaces with connections are nonholonomic smooth manifolds what correspond to Cartan term «nonholonomic space with a fundamental group». Examples shows, that the notion of nonholonomy is wider then the notion of connection.

УДК 514.75

СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ГИПЕРКВАДРИКИ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Н. Ю р ь ев а

(*Калининградский государственный университет*)

Рассматриваются поля соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных в окрестностях 2-го и 3-го порядка к гиперполосному распределению ☞ m-мерных линейных элементов в n-мерном аффинном пространстве (m < n-1) [1].

При построении различных охватов коэффициентов гиперквадрик фундаментальными объектами ☞ - распределения из этой совокупности выделены пучки соприкасающихся гиперквадрик, внутренне связанных с ☞ - распределением и обладающих разными геометрическими характеристиками .

Индексы пробегают следующие значения:

$$i,j,k = \overline{1,m}\ ;\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1}\ ;\ a,b,c = \overline{1,n-1};\ I,J,K,L = \overline{1,n}.$$

При операции дифференцирования используется оператор ∇, который действует по закону:

$$\nabla T^{L}_{IK} = dT^{L}_{IK} - T^{L}_{JK}\omega^{J}_{I} - T^{L}_{IJ}\omega^{J}_{K} + T^{J}_{IK}\omega^{L}_{J}.$$

1. Уравнение гиперквадрики аффинного пространства A_n относительно некоторого локального репера имеет вид

$$A_{IJ}x^{I}x^{J} + 2A_{I}x^{I} + A = 0, \tag{1}$$

где $A_{IJ} = A_{JI}$. Найдем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты A_{IJ}, A_{I}, A гиперквадрики (при $\omega^{I} = 0$), инвариантно связанной с ☞ - распределением [1] . Если репер преобразован при помощи вторичных параметров, то относительно нового репера уравнение гиперквадрики (1) будет иметь вид :

$$(A_{IJ} + \delta A_{IJ})(x^{I} - x^{K}\pi^{I}_{K})(x^{J} - x^{K}\pi^{J}_{K}) +$$
$$+ 2(A_{I} + \delta A_{I})(x^{I} - x^{K}\pi^{I}_{K}) + A + \delta A = 0,$$

где δ - символ дифференцирования по вторичным параметрам . Условие инвариантности гиперквадрики приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\delta A_{IJ} - A_{IK}\pi^{K}_{J} - A_{KJ}\pi^{K}_{I} = \theta A_{IJ},\ \delta A_{I} - A_{K}\pi^{K}_{I} = \theta A_{I},\ \delta A = \theta A, \tag{2}$$

Требование того, чтобы гиперквадрика (1) проходила через центр A образующего элемента и имела касание 1-го порядка с любой кривой, принадлежащей ☞ - распределению, приводит к следующим условиям:

$$A = 0, \quad A_{i} = 0, \quad A_{\alpha} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим точку A', лежащую на произвольной кривой, принадлежащей оснащающему распределению гиперплоскостей . Требование того, чтобы квадрики имели соприкосновение второго порядка с любой кривой, принадлежащей ☞ - распределению, т.е. чтобы точка A' принадлежала гиперквадрике с точностью до величин второго порядка, дает [1] :

$$A_{ij} = -A_{n}a_{ij},\ A_{\alpha\beta} = -A_{n}a_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где $a_{ij} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\Lambda^{n}_{ij} + \Lambda^{n}_{ji}),\ \nabla a_{ij} + a_{ij}\omega^{n}_{n} = a_{ijK}\omega^{K};$

$$a_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(H^{n}_{\alpha\beta} + H^{n}_{\beta\alpha}),\ \nabla a_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\omega^{n}_{n} = a_{\alpha\beta K}\omega^{K}.$$

Из дифференциальных уравнений (2) имеем:

$$\delta A_n - A_n \pi_n^n = \theta A_n, \tag{5}$$

где A_n - относительный инвариант. Если пронормировать коэффициенты так, чтобы

$$A_n = -1, \tag{6}$$

то получим

$$\theta = -\pi_n^n. \tag{7}$$

При этой нормировке условия (4) примут вид : $A_{ij} = a_{ij}, A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$.

Для такого охвата коэффициентов $A_{ij}, A_{\alpha\beta}$ соответствующие дифференциальные уравнения (2) удовлетворяются. Следовательно, уравнение соприкасающейся гиперквадрики имеет вид:

$$\begin{gathered} a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2A_{i\beta}x^i x^\beta + 2A_{in}x^i x^n + 2A_{\alpha n}x^\alpha x^n + \\ + A_{nn}x^n x^n - 2x^n = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Для коэффициентов $A_{in}, A_{\alpha n}, A_{i\beta}, A_{nn}$ гиперквадрики (8) система дифференциальных уравнений (2) с учетом (7) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \nabla_\delta A_{in} - A_{i\alpha}\pi_n^\alpha - a_{ij}\pi_n^j - A_{\alpha n}\pi_i^\alpha = 0, \\ \nabla_\delta A_{\alpha n} - A_{\alpha i}\pi_n^i - a_{\alpha\beta}\pi_n^\beta - A_{in}\pi_\alpha^i = 0, \\ \nabla_\delta A_{i\beta} - a_{ij}\pi_\beta^j - A_{in}\pi_\beta^n - a_{\alpha\beta}\pi_i^\alpha + A_{i\beta}\pi_n^n = 0, \\ \nabla_\delta A_{nn} - 2A_{ni}\pi_n^i - 2A_{n\gamma}\pi_n^\gamma - A_{nn}\pi_n^n = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

2. Коэффициенты $A_{in}, A_{\alpha n}, A_{i\beta}, A_{nn}$ можно охватить компонентами последовательности фундаментальных геометрических объектов ☞ - распределения не единственным способом . Рассмотрим один из них .

Пусть $\vec{\nu}$ - произвольная нормаль 1-го рода, внутренне связанная с ☞ - распределением [1] : $\vec{\nu} = \nu^i \vec{e}_i + \nu^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_n$,

где

$$\nabla\nu^i = \nu^i\omega_n^n - \omega_n^i + \nu_K^i\omega^K, \quad \nabla\nu^\alpha = \nu^\alpha\omega_n^n - \omega_n^\alpha + \nu_K^\alpha\omega^K. \tag{10}$$

Рассмотрим объекты :

$$\nu_i = \nu^j a_{ji}, \quad \nu_\beta = \nu^\alpha a_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Продифференцировав (11), получаем:

$$\nabla\nu_i - \nu_i\omega_n^n + a_{ij}\omega_n^j = \nu_{iI}\omega^I, \quad \nabla\nu_\beta - \nu_\beta\omega_n^n + a_{\alpha\beta}\omega_n^\alpha = \nu_{\beta I}\omega^I. \tag{12}$$

В силу (10), (12) свертки $\widetilde{\nu}_0 = \nu^i\nu_i$, $\widetilde{\nu}_1 = \nu^\alpha\nu_\alpha$ удовлетворяют уравнениям:

$$d\widetilde{\nu}_0 + 2\nu_i\omega_n^i - 2\widetilde{\nu}_0\omega_n^n = \widetilde{\nu}_{0I}\omega^I, \; d\widetilde{\nu}_1 + 2\nu_\alpha\omega_n^\alpha - 2\widetilde{\nu}_1\omega_n^n = \widetilde{\nu}_{1I}\omega^I.$$

Если положить $A_{in} = -\nu_i, A_{\alpha n} = -\nu_\alpha, A_{i\beta} = -\Lambda_{i\beta}, A_{nn} = \tilde{\nu}_0 + \xi H$, где ν_i (11), ν_α (11), $\tilde{\nu}_0$ (13), H [1,(4.10)], $\Lambda_{i\beta}$ [1], ξ - любой абсолютный инвариант, тогда дифференциальные уравнения (9) для $A_{in}, A_{\alpha n}, A_{i\alpha}, A_{nn}$ удовлетворяются . Таким образом, получаем однопараметрический пучок соприкасающихся гиперквадрик :

$$\begin{gathered} a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2\nu_i x^i x^n - 2\nu_\alpha x^\alpha x^n + \\ + (\tilde{\nu}_0 + \xi H)x^n x^n - 2x^n = 0, \end{gathered} \tag{13}$$

внутренним инвариантным образом присоединенных к оснащающему распределению гиперплоскостей $\wp\ (\Lambda)$.

3. Рассмотрим детерминант (n+1)-го порядка, составленный из коэффициентов гиперквадрики (13) : $a_0 = -|a_{ij}|\cdot|a_{\alpha\beta}|$. При $a_0 \neq 0$ центры этих квадрик определяются системой уравнений

$$\begin{cases} a_{ij}x^j + \Lambda_{i\beta}x^\beta - \nu_i x^n = 0,\ a_{\alpha\beta}x^\beta - \nu_\alpha x^n = 0, \\ -\nu_j x^j - \nu_\beta x^\beta + (\tilde{\nu}_0 + \xi H)x^n = -1. \end{cases} \tag{14}$$

Если $\xi \neq 0$, то разрешая систему (14), получим :

$$x^i = \nu^i x^n,\ x^\beta = 0,\ x^n = -\frac{1}{\xi H}.$$

Центры всех соприкасающихся гиперквадрик пучка (13) лежат на нормали $\vec{\nu}$. Поляра произвольной точки $(x_0^i, x_0^\alpha, x_0^n)$ относительно гиперквадрики (13) определяется уравнением :

$$\begin{gathered} (a_{ij}x_0^j + \Lambda_{i\beta}x_0^\beta - \nu_i x_0^n)x^i + (\Lambda_{i\alpha}x_0^i + a_{\alpha\beta}x_0^\beta - \nu_\alpha x_0^n)x^\alpha + \\ + ((\tilde{\nu}_0 + \xi H)x_0^n - \nu_i x_0^i - \nu_\alpha x_0^\alpha - 1)x^n - x_0^n = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Гиперплоскость (15) пересекает гиперплоскостной элемент по (n-2)-мерной плоскости

$$(a_{ij}x_0^j + \Lambda_{i\beta}x_0^\beta - \nu_i x_0^n)x^i + (a_{\alpha\beta}x_0^\beta - \nu_\alpha x_0^n)x^\alpha - x_0^n = 0, x^n = 0. \tag{16}$$

Полярой некоторой нормали $\hat{\nu}^i$ (отличной от ν^i): $x^i = \hat{\nu}^i x^n$, внутренне присоединенной к базисному Λ - распределению, относительно пучка (13) является (m-1)-мерная плоскость Λ_{m-1} :

$$T_i x^i - 1 = 0, \quad x^\alpha = 0, \quad x^n = 0, \tag{17}$$

где $T_i = a_{ij}\hat{\nu}^j - \Lambda_{i\beta}\hat{\nu}^\beta - \nu_i, \quad \nabla T_i - \Lambda_{i\beta}\omega_n^\beta = T_{iI}\omega^I$.

Полярой некоторой нормали $\hat{\nu}^\alpha$: $x^\alpha = \hat{\nu}^\alpha x^n$, внутренне присоединенной к ассоциированному χ-распределению характеристик $\chi_{n-m-1}(A)$ относительно пучка (13) является (n-m-2)-мерная плоскость π_{n-m-2} :

$$T_\alpha x^\alpha - 1 = 0, \quad x^i = 0, \quad x^n = 0, \tag{18}$$

где $T_\alpha = a_{\alpha\beta}\hat{\nu}^\beta - \nu_\alpha, \quad \nabla T_\alpha = T_{\alpha I}\omega^I$.

Из (15) и (16) видно, что полярой нормали $\{\nu^a\}$ относительно пучка (13) является плоскость $\pi_{n-2}(A) \subset H(A)$. Гиперквадрики пучка (13) устанавливают поляритет между нормалями первого рода $\{\nu^a\}$ и нормалями второго рода данного ☟ - распределения. В частности, нормали $\vec{\nu}$, которая была использована при построении охватов гиперквадрики пучка (13), в этом поляритете соответствует бесконечно удаленная (n-2)-мерная плоскость.

4. Рассмотрим гиперквадрику пучка (18), для которой $\xi = 0$:

$$\begin{gathered} a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2\nu_i x^i x^n - 2\nu_\alpha x^\alpha x^n + \tilde{\nu}_0 x^n x^n - \\ - 2x^n = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Центр этой квадрики - бесконечно удаленная точка нормали $\vec{\nu}$. Эта гиперквадрика будет (n-1)-мерным параболоидом. Уравнения:

$$\begin{gathered} a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2N_i x^i x^n - 2M_\alpha x^\alpha x^n + \tilde{L}x^n x^n - \\ - 2x^n = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

где $N_i = N^k a_{ki}, M_\alpha = M^\beta a_{\alpha\beta}, \tilde{L} = a_{ik}N^i N^k$, определяет в окрестности 2-го порядка параболоид, диаметром которого служит нормаль $\vec{L}$ [1]. Параболоид, диаметром которого служит нормаль $\vec{\beta}$ [1], будет определяться уравнением:

$$\begin{gathered} a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2\frac{\beta_i}{n+2}x^i x^n - 2\frac{\beta_\alpha}{n-m+1}x^\alpha x^n + \\ + \tilde{\beta}x^n x^n - 2x^n = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Параболоид (20) пересекает нормаль $\vec{L}$ в точке

$$x^i = \frac{2L^i}{T_0}, \; x^n = \frac{2}{T_0}, \; x^\alpha = 0, \text{ где } T_0 = a_{ij}L^i L^j - \frac{2\beta_i}{n+2} + \tilde{\beta}.$$

Аналогично параболоид (21) пересекает нормаль $\vec{\beta}$ в точке

$$x^i = \frac{2\beta^i}{T_0}, \; x^n = \frac{2}{T_0}, \; x^\alpha = 0.$$

Прямая

$$x^i = \frac{2L^i}{T_0} + \lambda\frac{2(\beta^i - L^i)}{T_0}, \quad x^n = \frac{2}{T_0}, \quad x^\alpha = 0,$$

проходящая через эти точки, параллельна гиперплоскостному элементу ☟ .

Выделим из пучка (13) гиперквадрику, соответствующую $\xi = 1$:

$$a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2\nu_i x^i x^n - 2\nu_\alpha x^\alpha x^n + \\ + (\tilde{\nu}_0 + H)x^n x^n - 2x^n = 0. \tag{22}$$

Центр такой квадрики будет лежать на нормали $\vec{\nu}$ в точке

$$x^i = -\frac{\nu^i}{H}, \quad x^\beta = 0, \quad x^n = -\frac{1}{H}.$$

Возьмем в качестве нормали $\vec{\nu}$ нормаль $\vec{\beta}$ [1]. При таком выборе $\vec{\nu}$ уравнение (13) примет вид :

$$a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta + 2\frac{\beta_i}{m+2}x^i x^n + 2\frac{\beta_\alpha}{n-m+1}x^\alpha x^n + \\ + (\beta + \underset{\beta}{H})x^n x^n - 2x^n = 0, \tag{23}$$

где $\underset{\beta}{H} = -\frac{1}{n}(\beta_i^i - \beta^k \beta^j \Lambda_{kj})$. Полярой нормали Φ^i [1]: $x^i = (b^i + h^i)x^n$, $x^\beta = 0$, внутренне присоединенной к базисному Λ- распределению в дифференциальной окрестности 3-го порядка, относительно гиперквадрики (23), является (m-1)-мерная плоскость :

$$(a_{ij}(b^i + h^i) + \frac{b_j}{m+2})x^j - 1 = 0, x^\beta = 0, x^n = 0.$$

Полярой нормали Φ^α [1]: $x^\alpha = (b^\alpha + h^\alpha)x^n, x^i = 0$, внутренне присоединенной к характеристическому χ- распределению, является (n-m-2)-мерная плоскость:

$$(\Lambda_{\alpha\beta}(b^\alpha + h^\alpha) + \frac{b_\beta}{n-m+1})x^\beta - 1 = 0, x^i = 0, x^n = 0.$$

Пучок нормалей 1-го рода $\mathfrak{R}^a(\xi) = \Phi^a + \xi\hat{\Phi}^a$, внутренним инвариантным образом присоединенный к оснащающему ☟ - распределению, полярно сопряжен пучку нормалей 2-го рода ☟ - распределения:

$$(\Phi_a + \xi\hat{\Phi}_a)x^a - 1, \quad x^n = 0,$$

относительно гиперквадрики (22) . При m=0, когда гиперполосное распределение становится гиперплоскостным, приходим к результатам работы [3, §4].

В общем случае, когда относительный инвариант второго порядка $\hat{H} \neq 0$ [1,(4,22)], можно рассматривать двупараметрические пучки соприкасающихся гиперквадрик следующего вида:

$$a_{ij}x^i x^j + a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2\Lambda_{i\beta}x^i x^\beta - 2\nu_i x^i x^n - 2\nu_\alpha x^\alpha x^n + \\ + (\tilde{\nu}_0 + \xi H + \tau\hat{H})x^n x^n - 2x^n = 0. \tag{24}$$

Геометрия этих пучков аналогична геометрии пучка (13) . При $\tau = 0$ из двупараметрического пучка (24) получаем однопараметрический пучок (13). Аналогичные построения можно провести для однопараметрического пучка соприкасающихся гиперквадрик, получающихся из двупараметрического пучка (24) при $\xi = 0$.

Работа выполнена по теме гранта (95-0-1.0-22).

Библиографический список

1. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87, N 68-07-В87.

2. *Попов Ю.И., Юрьева С.Н.* О нормалях Нордена-Чакмазяна гиперполосного распределения аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С. 74-86.

3. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 5. С. 169-193.

S.N. I u r e v a

OSCULATING HYPERQUADRICS OFA HYPERSTRIP DISTRIBUTION OF AN AFFINE SPACE

Fields of osculating hyperquadrics adjoined by interior manner in neighborhoods of the second and the third order to the hyperstrip distribution ☟ of m-dimentional linear elements are considered in a n-dimentional affine space (m<n-1). By constructing different envelopments of coefficients of hyperquadrics by fundamental objects of the ☟ -distribution some bundles of osculating hyperquadrics are selected from this totality, which are internally connected with the ☟ -distribution and possessing different geometric characteristics.