By means of pulverization (geodesic) modelling theory, which belong to the author, it is obtained some geometric criterions of point-trajectory isomorphisms of quasigeodesic flows.

УДК 514.75

НЕГОЛОНОМНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

В.В. Кайзер

(Фридрих-Александр-Университет Эрлангена-Нюренберга)

Приводится математическое содержание письма В.С.Малаховскому от В.В.Кайзера о неголономных конгруэнциях и неголономных комплексах прямых в трехмерном проективном пространстве. Указана связь с дифференциальной геометрией многообразий фигур.

Посылаю Вам одну из своих заметок* по локальной дифференциальной геометрии гладких распределений (в русской литературе прижился термин - распределения касательных элементов) на грассмановом многообразии M всех прямых трехмерного проективного пространства. Поскольку dim M=4, возможны только двумерные и трехмерные нетривиальные распределения на этом многообразии. Первые я называю неголономными конгруэнциями, а вторые - неголономными комплексами. Терминология навеяна разумеется тем, что, как Вам безусловно хорошо известно, в случае интегрируемости такового распределения, через каждую прямую l из M проходит его единственное максимальное интегральное многообразие, представляющее собой двумерное или соответственно трехмерное подмногообразие грассманова многообразия, для которых уже, как известно, давно сложились наименования конгруэнций и комплексов. Мне известен ряд работ Литовских и Томских геометров по этой тематике. Первые из них трактуют неголономную линейчатую геометрию несколько иначе, чем это делаю я, а вторые основной упор делают на изучении только совокупности интегральных линейчатых поверхностей (регулюсов или в немецкой терминологии Regelfläche) или в терминологии В.В.Вагнера допустимых регулюсов (непонятно, почему следует считать недопустимыми неинтегральные кривые распределения?), эту совокупность томичи, следуя Инцингеру, называют пфаффовыми многообразиями. Я следую здесь скорее Ю.Г.Лумисте с его подходом к неголономной геометрии на однородных пространствах как к теории распределений на них.

Много основных понятий дифференциальной геометрии неголономных конгруэнций и комплексов можно перенести на случай неинтегрируемых распределений на грассмановом многообразии. Думаю, что и это Вам также хорошо известно, так же как и то, что при переходе к неголономному случаю некоторые понятия “голономной” геометрии как бы раздваиваются или даже “размножают-

* Будет опубликована в следующих выпусках.

ся", если можно так выразиться. Это было замечено еще в классических работах С.Ли, А.Фосса, Лилиенталя и Д.М.Синцова по геометрии совокупности интегральных кривых пфаффова уравнения в трехмерном евклидовом пространстве.

В посылаемой мною Вам статье речь идет о частных классах так называемых специальных неголономных конгруэнций и комплексов. Специальные неголономные конгруэнции в интегрируемом случае не столь интересны, поскольку их максимальные интегральные многообразия представляют собой либо связки прямых, либо множества всех прямых, лежащих в плоскости. Однако в неинтегрируемом случае их роль значительна, поскольку они появляются в теории неголономных специальных комплексов, которые сами весьма полезны при изучении неголономных (неспециальных) конгруэнций. Например, для параболической неголономной конгруэнции (с единственным фокусом и единственной фокальной плоскостью на каждой прямой из М) существует единственный содержащий ее специальный неголономный комплекс.

Имеется два типа неголономных конгруэнций. У первых из них фокальные плоскости неопределены, но на каждой прямой имеется единственный фокус, а у вторых неопределены фокусы, но зато имеется единственная фокальная плоскость на каждой прямой. Поэтому их геометрия эквивалентна теории 4-мерных многообразий фигур, состоящих из инцидентных точки и прямой или прямой и плоскости соответственно.

Что касается специальных неголономных комплексов, то в интегрируемом случае их максимальные интегральные многообразия представляют собой хорошо известные специальные комплексы, т.е. комплексы касательных некоторой поверхности. Оказывается, что задание специального неголономного комплекса эквивалентно оснащению грассманова многообразия гладким полем точек на его прямых и гладким полем плоскостей, содержащих его прямые. Поэтому геометрия специальных неголономных комплексов эквивалентна геометрии 4-мерных многообразий флагов, т.е. фигур, состоящих из инцидентных друг другу точки, прямой и плоскости.

Любопытно, что при изучении параболических конгруэнций С.П.Фиников ограничивается лишь констатацией того факта, что они являются конгруэнциями касательных к линиям одного семейства асимптотических некоторой поверхности, т.е. их теория сводится по сути к теории поверхностей. Однако, в неинтегрируемом случае возникает нетривиальная теория параболических неголономных конгруэнций. Оказывается, что (в невырожденных случаях) эта теория эквивалентна геометрии 4-мерных многообразий фигур, состоящих из двух пересекающихся прямых.

Что касается теории гиперболических неголономных конгруэнций (с двумя различными фокусами и фокальными плоскостями для каждой прямой), то и здесь оказывается важной роль специальных неголономных комплексов, поскольку существует в точности два специальных неголономных комплекса, содержащих заданную гиперболическую неголономную конгруэнцию. Поэтому (что давно уже хорошо известно) геометрия гиперболических неголономных конгруэнций эквивалентна теории 4-мерных многообразий фигур, состоящих их двух *упорядоченных* пар инцидентных друг другу точек и плоскостей. Следует заметить, что (а на это мало обращено внимания в литературе) при замене упорядочения точек и плоскостей друг другу происходит фактически замена одной гиперболической неголономной конгруэнции на другую, сопряженную первоначальной относительно плюккеровой квадрики при перенесении Плюккера, поскольку сопряженные неголономные конгруэнции имеют на каждой прямой общие фокусы и общие фокальные плоскости.

Забавно, что в литературе я не нашел исследований по теории эллиптических неголономных конгруэнций. С.П.Фиников ограничивается замечанием о том, что в комплексной области их теория совпадает с теорией гиперболических неголономных конгруэнций. Это, конечно, так, но, однако же, теория вещественных эллиптических конгруэнций так же отличается от теории вещественных гиперболических конгруэнций, как теория поверхностей положительной кривизны отличается от теории поверхностей отрицательной кривизны. Что касается геометрии эллиптических неголономных конгруэнций, то, например, в отличие от гиперболического случая не существует никаких специальных неголономных комплексов, содержащих заданную эллиптическую неголономную конгруэнцию.

Из вышеизложенного следует, что неголономная линейчатая геометрия тесно связана с геометрией многообразий фигур, развиваемой в Калининградской геометрической школе.

V.V. K a i s e r

NONHOLONOMIC RULED GEOMETRY AND GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

Mathematical content of the letter from V.V.Kaiser to V.S.Malakhovsky is brouht about the nonholonomic congruences and nonholonomic complexes of lines in three-dimensional projective space. The connection was indicated with the differential geometry of manifolds of figures.

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E^n

Г.В. К у з н е ц о в

(Тульский государственный педагогический университет)

Пусть соответствие $f\colon \Omega \to \overline{\Omega}$ является конформным , где Ω и $\overline{\Omega}$ - области в евклидовом пространстве E^n и $y=f(x)$, при этом $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$. Через