Список литературы

1. *Полякова К.В.* Задание аффинной связности с помощью горизонтальных векторов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 100—112.
2. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева-Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Там же. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

N. Ryazanov

Lie bracket for tangent vectors and Bianchi identities in principal bundle

The principal bundle is considered. Adapted Pfaffian derivatives of frame vectors of the tangent space to the bundle at arbitrary point are built. Expression for Lie bracket of arbitrary vectors in the tangent space is found. Bianchi Identities for the compositions of the curvature object in an arbitrary principal bundle, including components of a torsion object affine connection are obtained. The acting horizontal curvature forms and vertical connection forms on vertical, non-vertical and horizontal vectors is described.

УДК 514.76

Д.А. Сафонов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Обобщенная аффинная связность и ее вырождение в аффинную связность

На гладком многообразии рассмотрено расслоение линейных реперов. Предложен способ задания обобщенной аффинной связности на этом расслоении. Связность задается полем объекта связности, состоящим из тензора связности и объекта аффинной связности. Объект обобщенной аффинной связности определяет объект кручения. Доказано, что обобщенная аффинная связность, у которой тензор связности является либо нулевым, либо символом Кронекера, вырождается в аффинную связность.

Ключевые слова: гладкое многообразие, расслоение линейных реперов, аффинная связность, объект связности, объект кручения, объект кривизны.

Рассмотрим гладкое многообразие M_n со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j . \tag{1}$$

Здесь и далее индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, \ldots = \overline{1,n} .$$

Получим структурные уравнения на формы ω^i_j, продолжая уравнения (1). Возьмем внешний дифференциал от обеих частей выражений (1):

$$d\omega^j \wedge \omega^i_j - \omega^j \wedge d\omega^i_j = 0 .$$

Подставим внешний дифференциал форм ω^j и переобозначим немые индексы

$$\omega^j \wedge \omega^k_j \wedge \omega^i_k - \omega^j \wedge d\omega^i_j = 0 .$$

Вынесем формы ω^j за скобки:

$$(d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k) \wedge \omega^j = 0 .$$

Разрешая по лемме Лаптева [1], получаем продолжение системы (1):

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} , \tag{2}$$

причем $\omega^i_{[jk]} \cong 0$, где символом $\cong$ обозначено сравнение по модулю базисных форм ω^i.

Система уравнений (1, 2) задает расслоение линейных реперов $L_{n^2}(M_n)$, $L_{n^2}=GL(n)$, причем (1) — структурные уравнения базы M_n. Из выражений (2) получаем структурные уравнения типового слоя L_{n^2}

$$d\pi_j^i=\pi_j^k\wedge\pi_k^i,\ \pi_j^i=\omega_j^i\Big|_{\omega^i=0}.$$

Зададим обобщенную аффинную связность [2, с. 125—127], преобразуя базисные ω^i и слоевые ω_j^i формы следующим образом:

$$\widetilde{\omega}^i=\omega^i-L_j^i\omega^j,\widetilde{\omega}_j^i=\omega_j^i-\Gamma_{jk}^i\omega^k. \qquad (3)$$

Найдем структурные уравнения на преобразованные формы. Продифференцируем внешним образом равенства (3_1):

$$d\widetilde{\omega}^i=\omega^j\wedge\omega_j^i-dL_j^i\wedge\omega^j-L_j^i\omega^k\wedge\omega_k^j.$$

Из обозначений (3_1) выразим формы ω^i через формы $\widetilde{\omega}^i$ и подставим их в первое слагаемое

$$d\widetilde{\omega}^i=(\widetilde{\omega}^i+L_k^i\omega^k)\wedge\omega_j^i-dL_j^i\wedge\omega^j-L_j^i\omega^k\wedge\omega_k^j.$$

Переобозначим немые индексы, раскроем скобки и вынесем формы ω^j за скобки:

$$d\widetilde{\omega}^i=\widetilde{\omega}^j\wedge\omega_j^i+\omega^j\wedge(dL_j^i+L_j^k\omega_k^i-L_k^i\omega_j^k).$$

Запишем эти уравнения короче, вводя дифференциальный оператор Δ:

$$d\widetilde{\omega}^i=\widetilde{\omega}^j\wedge\omega_j^i+\omega^j\wedge\Delta L_j^i,\ \Delta L_j^i=dL_j^i+L_j^k\omega_k^i-L_k^i\omega_j^k.$$

Из равенств (3_2) выразим формы ω_j^i через формы $\widetilde{\omega}_j^i$ и подставим их в полученные уравнения:

$$d\widetilde{\omega}^i=\widetilde{\omega}^j\wedge(\widetilde{\omega}_j^i+\Gamma_{jk}^i\omega^k)+\omega^j\wedge\Delta L_j^i.$$

Раскроем скобки и осуществим частичный возврат к исходным формам:

$$d\widetilde{\omega}^i = \widetilde{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + (\omega^j - L^j_l \omega^l) \wedge \Gamma^i_{jk}\omega^k + \omega^j \wedge \Delta L^i_j .$$

В предположении, что L^i_j — тензор, т. е. $\Delta L^i_j = L^i_{jk}\omega^k$, вынесем квадратичную форму $\omega^j \wedge \omega^k$ за скобки:

$$d\widetilde{\omega}^i = \widetilde{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + \left(\Gamma^i_{jk} - L^l_j \Gamma^i_{lk} + L^i_{jk}\right)\omega^j \wedge \omega^k .$$

В силу антисимметричности внешнего произведения линейных форм слагаемые в скобках можно проальтернировать по нижним индексам. Обозначим полученную сумму через

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} - L^l_{[j|}\Gamma^i_{l|k]} + L^i_{[jk]} . \tag{4}$$

Назовем T^i_{jk} объектом кручения обобщенной аффинной связности. Итак,

$$d\widetilde{\omega}^i = \widetilde{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k . \tag{5}$$

Продифференцируем внешним образом равенства (3_2):

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} - d\Gamma^i_{jk} \wedge \omega^k - \Gamma^i_{jk}\omega^l \wedge \omega^k_l .$$

Проделывая преобразования, аналогичные описанным выше, получаем

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}\omega^k \wedge \omega^l . \tag{6}$$

По теореме Картана — Лаптева [3, с. 82, 83] уравнения (6) задают связность только в том случае, когда компоненты объекта связности Γ^i_{jk} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l .$$

Тогда выражения (6) можно записать иначе

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + \left(\Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k|}\Gamma^i_{m|l]}\right)\omega^k \wedge \omega^l .$$

Выражение в скобках — объект кривизны аффинной связности. Обозначим его через

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k|}\Gamma^i_{m|l]}\,.$$

Итак,

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l\,. \qquad (7)$$

Определение 1. *Совокупность тензора связности* L^i_j *и объекта аффинной связности* Γ^i_{jk} *назовем объектом обобщенной аффинной связности* $L = \{L^i_j, \Gamma^i_{jk}\}$.

Определение 2. *Гладкое многообразие со структурными уравнениями (1, 5, 7), определенное с помощью объекта* L, *будем называть пространством обобщенной аффинной связности* $L_{n^2+[n],n}$.

Покажем, что при двух специальных видах тензора связности L^i_j обобщенная связность вырождается в аффинную связность.

1. Положим $L^i_j = 0$. Тогда формы связности $\widetilde{\omega}^i$ станут базисными формами ω^i, выражение (4) превратится в объект кручения аффинной связности $\dot{T}^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$.

Уравнения (5) примут вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + \dot{T}^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k\,. \qquad (8)$$

В совокупности с уравнениями (7) они образуют замкнутую систему и определяют пространство аффинной связности $L_{n^2,n}$.

2. Положим $L^i_j = \delta^i_j$. Выражения (4) примут следующий вид:

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} - \delta^l_{[j|}\Gamma^i_{l|k]}\,.$$

Осуществляя свертку, получаем, что T^i_{jk} обращается в 0.

Также из уравнений (3_1) имеем $\widetilde{\omega}^i = \omega^i - \delta^i_j \omega^j \equiv 0$, т.е. формы связности $\widetilde{\omega}^i$ пропадут. Внесем в выражения (1) формы связности $\widetilde{\omega}^i_j$, выражая через них формы ω^i_j из равенств (3_2):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (\widetilde{\omega}^i_j + \Gamma^i_{jk}\omega^k).$$

Раскроем скобки и проальтернируем коэффициенты во втором слагаемом по нижним индексам и получим уравнения (8).

Теорема. *Обобщенные аффинные связности с особыми объектами связности* $L_0 = \{0, \Gamma^i_{jk}\}$, $L_1 = \{\delta^i_j, \Gamma^i_{jk}\}$ *вырождаются в аффинную связность с объектом* Γ^i_{jk}.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1999. Т. 1.

3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. «Пробл. геом.» Тр. геом. сем. 1979. Т. 9. С. 5—247.

D. Safonov

The generalized affine connection and its degeneration into affine connection

On smooth manifold the bundle of linear frames is considered. The way of giving generalized affine connection on this bundle is offered. It is set by field of connection object consisting of connection tensor and object of affine connection. The object of generalized affine connection defines object of torsion. It is proved that the generalized affine connection with connection tensor is zero or Kroneker's symbol degenerates into affine connection.