УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

ESkrydlova@kantiana.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4471-2750

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-18

Тензор кривизны-кручения связности Картана

Рассмотрена группа Ли, содержащая подгруппу. Такая группа есть главное расслоение с типовым слоем — подгруппой и базой — однородным пространством, получающимся при факторизации группы по подгруппе. Отталкиваясь от этой группы, мы построили структурные уравнения пространства со связностью Картана, обобщающей точечную проективную связность Картана, линейчатую проективную связность Акивиса и плоскостную проективную связность. Структурные уравнения этой картановой связности, содержащие компоненты объекта кривизны-кручения, позволили: 1) показать, что объект кривизны-кручения образует тензор, содержащий тензор кручения; 2) найти аналог тождеств Бианки, которому удовлетворяют тензор кривизны-кручения и его пфаффовы производные; 3) получить условия превращения пфаффовых производных тензора кривизны-кручения в ковариантные производные относительно связности Картана.

Ключевые слова: связность Картана, проективная связность Картана, тензор кривизны-кручения картановой связности, аналог тождеств Бианки, ковариантные производные относительно связности Картана.

Поступила в редакцию 17.05.2019 г.

1. Группа Ли с подгруппой как главное расслоение

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ имеет структурные уравнения, обобщающие структурные уравнения группы G, действующей в проективном пространстве P_n. Если H — подгруппа стационарности точки, то проективное пространство есть фактор-пространство $P_n = G/H$, причем $n = \dim G - \dim H$. В случае неэффективного проективного пространства P_n имеем: $G = GL(n+1)$, $H = H_{n^2+n+1}$ — центролинейная группа. Аналогичным образом построим пространство со связностью Картана $K_{n,r}$, отталкиваясь от n-мерного однородного пространства K_n.

Рассмотрим $(r+n)$-мерную группу Ли G_{r+n} со структурными уравнениями

$$d\theta^I = C^I_{JK}\theta^J \wedge \theta^K, \; C^I_{(JK)} = 0 \;\; (I,... = \overline{1, r+n}), \tag{1}$$

где C^I_{JK} — антисимметричные постоянные. Замкнем уравнения (1_1):

$$C^I_{JK}C^J_{LM}\theta^K \wedge \theta^L \wedge \theta^M = 0, \tag{2}$$

откуда следует:

$$C^I_{J[K}C^J_{LM]} = 0.$$

Учитывая антисимметрию по индексам L и M, получим тождества Якоби

$$C^I_{J\{K}C^J_{LM\}} = 0, \tag{3}$$

где фигурные скобки обозначают циклирование, квадратные скобки — альтернирование, а круглые скобки — симметрирование.

Разобьем значения индексов на две серии:

$$I=(\alpha,\ i);\ \alpha,...=\overline{1,\ r};\ i,...=\overline{r+1,\ r+n}\ .$$

Требуя выполнения условия

$$C^i_{\alpha\beta}=0\ , \tag{4}$$

запишем структурные уравнения (1) следующим образом:

$$d\theta^i=\theta^j\wedge\left(C^i_{jk}\theta^k+2C^i_{j\alpha}\theta^\alpha\right), \tag{5}$$

$$d\theta^\alpha=C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma+\theta^i\wedge\left(C^\alpha_{ij}\theta^j-2C^\alpha_{\beta i}\theta^\beta\right). \tag{6}$$

В этом случае система уравнений

$$\theta^i=0 \tag{7}$$

вполне интегрируема. Для постоянных $C^\alpha_{\beta\gamma}$ выполняются тождества Якоби, так как из тождеств (3) следует

$$C^\alpha_{\beta\{\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon\}}+C^\alpha_{j\{\gamma}C^j_{\delta\varepsilon\}}=0\ .$$

Используя равенства (4), получаем $C^\alpha_{\beta\{\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon\}}=0$. Значит, $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные r-членной группы Ли H_r, являющейся подгруппой группы G_{r+n}. Уравнения (6) дают структурные уравнения группы H_r:

$$d\overline{\theta}^\alpha=C^\alpha_{\beta\gamma}\overline{\theta}^\beta\wedge\overline{\theta}^\gamma\quad\left(\overline{\theta}=\theta\big|_{(7)}\right).$$

Утверждение 1. *При условии (4) группа Ли G_{r+n} является главным расслоением $H_r(K_n)$ со структурными уравнениями (5, 6), базой которого служит n-мерное однородное пространство $K_n=G_{r+n}/H_r$, а типовым слоем — группа Ли H_r. Если выполняется условие редуктивности* (*см., напр.,* [1, с. 456; 2, с. 176])

$$C^{\alpha}_{\beta i} = 0\,, \qquad (8)$$

то расслоение $H_r(K_n)$ *становится пространством со связностью* $H(K)_{r,n}$, *обладающим постоянным тензором кривизны* C^{α}_{ij}.

2. Построение структурных уравнений пространства со связностью Картана

Изложим алгоритм построения структурных уравнений пространства картановой связности.

А. В однородном пространстве $K_n = G_{r+n} / H_r$ действует группа Ли G_{r+n} со структурными уравнениями (1), содержащая подгруппу H_r.

Б. Левые части вполне интегрируемой системы (7), выделяющей подгруппу стационарности H_r точки в пространстве K_n, содержат n форм θ^i, которые называются главными.

В. Структурные уравнения пространства со связностью Картана, которое обозначим $K_{n,\,r}$, получаются в результате обобщения уравнений (1) группы $G_{r+n} = H_r(K_n)$ путем добавления линейных комбинаций внешних произведений базисных форм — аналогов главных форм.

Теорема 1. *Структурные уравнения пространства картановой связности* $K_{n,\,r}$ *имеют следующий вид:*

$$d\omega^I = C^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K + R^I_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,\;\; R^I_{(jk)} = 0, \qquad (9)$$

где C^I_{JK} *— постоянные группы Ли* G_{r+n}, *содержащей подгруппу* H_r, *а совокупность коэффициентов* R^I_{jk} *называется объектом кривизны-кручения.*

Используем условие (4) в подробно записанных уравнениях (9_1):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + K^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad (10)$$

$$d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\omega^\beta \wedge \omega^i + K^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j; \qquad (11)$$

$$\omega^i_j = 2C^i_{j\alpha}\omega^\alpha, \ K^i_{jk} = C^i_{jk} + R^i_{jk}, \ K^\alpha_{ij} = C^\alpha_{ij} + R^\alpha_{ij}. \qquad (12)$$

Структурные уравнения пространства $K_{n,\,r}$ в виде (10, 11) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями Евтушика [2, с. 175] для специализированной связности Картана.

Поскольку структурные уравнения (11) содержат внешние произведения форм связности ω^β и базисных форм ω^i, справедлива

Теорема 2. *Пространство со связностью Картана* $K_{n,\,r}$ *не является главным расслоением со связностью. Оно обобщает точечное пространство проективной связности Картана* $P_{n,\,n}$ [3]*, линейчатое пространство проективной связности Акивиса* $P_{n,\,2(n-1)}$ [4] *и плоскостное пространство проективной связности* $P_{n,\,(m+1)(n-m)}$ [5]*, которые также не обладают* (*см.* [6, с. 167]) *главными связностями.*

Представим уравнения (10, 11) в следующем виде:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j, \ d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta + K^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j; \qquad (13)$$

$$\theta^i_j = \omega^i_j + K^i_{jk}\omega^k, \ \theta^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma + 2C^\alpha_{\beta i}\omega^i. \qquad (14)$$

Теорема 3. *Пространство картановой связности* $K_{n,\,r}$*, определенное структурными уравнениями (13), является пространством со связностью Эресмана — Вагнера* [7—10]*, объект кривизны которого* K^α_{ij} *выражается по формуле (12₃). Если выполняется дополнительное условие (8), то простран-*

ство $K_{n,\,r}$ *становится главным расслоением* $H_r(M_n)$, *базой которого служит n-мерное гладкое многообразие* M_n *со структурными уравнениями* (13_1), *а типовым слоем — группа Ли* H_r. *Это расслоение есть пространство со связностью* $H(M)_{r,\,n}$, *обобщающее пространство* $H(K)_{r,\,n}$.

3. Вывод дифференциальных уравнений тензора кривизны-кручения

Замкнем структурные уравнения (9_1) пространства $K_{n,\,r}$, используя (10):

$$2C^I_{JK}C^J_{LM}\omega^K\wedge\omega^L\wedge\omega^M+\Delta R^I_{jk}\wedge\omega^j\wedge\omega^k+ \\ +\left(R^I_{mk}K^m_{lj}+R^I_{jm}K^m_{lk}\right)\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l=0, \tag{15}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta R^I_{jk}=dR^I_{jk}+R^J_{jk}\Omega^I_J-R^I_{lk}\omega^l_j-R^I_{jl}\omega^l_k, \tag{16}$$

$$\Omega^I_J=2C^I_{JK}\Omega^K=\omega^I_J+2C^I_{Jk}\omega^k,\quad \omega^I_J=2C^I_{J\alpha}\omega^\alpha. \tag{17}$$

По аналогии с равенствами (2) первое слагаемое в уравнениях (15) равно нулю в силу тождеств Якоби (3). Пользуясь антисимметриями (1_2, 9_2) и выражением (12_2), преобразуем последнее слагаемое уравнений (15):

$$\left(R^I_{m[k}K^m_{lj]}+R^I_{m[j}K^m_{kl]}\right)\omega^j\wedge\omega^k\wedge\omega^l.$$

Поскольку компоненты K^m_{kl} антисимметричны, перейдем в коэффициентах от альтернирования по трем индексам к циклированию:

$$R^I_{m[k}K^m_{lj]}+R^I_{m[j}K^m_{kl]}=2R^I_{m\{j}K^m_{kl\}}.$$

В результате уравнения (15) упрощаются:

$$\Delta R^I_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k + 2R^I_{m\{j}K^m_{kl\}}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0. \tag{18}$$

Представим уравнения (18) в следующем виде:

$$\left(\Delta R^I_{jk} \wedge \omega^k - 2R^I_{m\{j}K^m_{kl\}}\omega^k \wedge \omega^l\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева [11; 12]:

$$\Delta R^I_{jk} \wedge \omega^k - 2R^I_{m\{j}K^m_{kl\}}\omega^k \wedge \omega^l = \omega^k \wedge \omega^I_{jk}, \tag{19}$$

причем выполняются условия полуголономности [13]:

$$\omega^I_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \ \leftrightarrow \omega^I_{[jk]} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \omega^I_{[jk]} = \lambda^I_{jkl}\omega^l, \ \lambda^I_{(jk)l} = 0, \ \lambda^I_{\{jkl\}} = 0. \tag{20}$$

Преобразуем уравнения (19):

$$\left(\Delta R^I_{jk} + 2R^I_{m\{j}K^m_{kl\}}\omega^l + \omega^I_{jk}\right) \wedge \omega^k = 0.$$

Раскроем эти квадратичные уравнения по лемме Картана и проальтернируем результат по индексам j, k:

$$\Delta R^I_{jk} + 2R^I_{m\{[j}K^m_{k]l\}}\omega^l + \omega^I_{[jk]} = \overline{R}^I_{[jk]l}\omega^l, \tag{21}$$

причем $\overline{R}^I_{j[kl]} = 0$. С помощью условия полуголономности (20_1) дифференциальные уравнения (21) примут окончательный вид:

$$\Delta R^I_{jk} = R^I_{jkl}\omega^l, \ R^I_{jkl} = \overline{R}^I_{jkl} - 2R^I_{m\{[j}K^m_{k]l\}}\omega^l - \lambda^I_{jkl}. \tag{22}$$

В силу антисимметрии (20_2) пфаффовы производные R^I_{jkl} компонент R^I_{jk} антисимметричны по двум индексам:

$$R^I_{(jk)l} = 0, \tag{23}$$

что соответствует антисимметрии (9_2) самих компонент R^I_{jk}.

Из уравнений (22_1) с учетом условия (4) и обозначений (12_1, 16, 17) получим дифференциальные сравнения по модулю базисных форм ω^l:

$$\Delta R^i_{jk} \cong 0 \,(\mathrm{mod}\,\omega^l), \quad \Delta R^\alpha_{jk} + 2R^l_{jk} C^\alpha_{l\beta}\omega^\beta \cong 0; \qquad (24)$$

$$\Delta R^\alpha_{jk} = dR^\alpha_{jk} + R^\beta_{jk}\omega^\alpha_\beta - R^\alpha_{lk}\omega^l_j - R^\alpha_{jl}\omega^l_k.$$

Возвращаясь к кубичным уравнениям (18), подставим в них дифференциальные уравнения (22_1) и вынесем все базисные формы:

$$\left(R^I_{jkl} + 2R^I_{m\{j} K^m_{kl\}}\right)\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,$$

откуда с учетом антисимметрии (23) пфаффовых производных R^I_{jkl} и выражений (12_2) компонент K^m_{kl} получим:

$$R^I_{\{jkl\}} + 2R^I_{m\{j}\left(C^m_{kl\}} + R^m_{kl\}}\right) = 0. \qquad (25)$$

Теорема 4. *Объект кривизны-кручения R^I_{jk} пространства со связностью Картана $K_{n,r}$ является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (22_1). Тензор кривизны-кручения R^I_{jk} содержит тензор кручения R^i_{jk}, компоненты которого подчиняются дифференциальным сравнениям (24_1). Компоненты тензора R^I_{jk} и их пфаффовы производные R^I_{jkl} удовлетворяют аналогу тождеств Бианки (25).*

Из дифференциальных сравнений (24_2) вытекают два утверждения относительно условий тензорности подобъекта R^α_{jk} тензора R^I_{jk}.

Утверждение 2. *Если пространство картановой связности* $K_{n,r}$ *без кручения, то есть* $R^i_{jk} = 0$, *то тензор кривизны-кручения* R^I_{jk} *вырождается в тензор кривизны* R^α_{ij} .

Утверждение 3. *Если группа Ли* G_{r+n} *является главным расслоением со связностью* $H(K)_{r,n}$, *то есть выполняется условие редуктивности (8), то подобъект* R^α_{ij} *тензора кривизны-кручения* R^I_{jk} *становится тензором, который в сумме с постоянными* C^α_{ij} *дает тензор кривизны* K^α_{ij} *(12₃) пространства со связностью* $H(M)_{r,n}$.

4. Продолжение дифференциальных уравнений тензора кривизны-кручения

Для продолжения дифференциальных уравнений (22_1) найдем внешние дифференциалы форм ω^i_j и Ω^I_J, которые в них входят. Дифференцируем формы (12_1) с помощью структурных уравнений (11):

$$d\omega^i_j = 2C^i_{j\gamma}C^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{26}$$

$$\omega^i_{jk} = 2C^i_{j\alpha}\left(K^\alpha_{kl}\omega^l - 2C^\alpha_{\beta k}\omega^\beta\right). \tag{27}$$

Возьмем следующие внешние произведения:

$$\begin{aligned} \omega^k_j \wedge \omega^i_k &= 4C^k_{j[\alpha}C^i_{|k|\beta]}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta = \\ &= 2\left(C^k_{j\alpha}C^i_{k\beta} - C^k_{j\beta}C^i_{k\alpha}\right)\omega^\alpha \wedge \omega^\beta. \end{aligned} \tag{28}$$

Рассмотрим соответствующую часть тождеств Якоби (3):

$$C^i_{K\beta}C^K_{j\alpha} + C^i_{Kj}C^K_{\alpha\beta} + C^i_{K\alpha}C^K_{\beta j} = 0.$$

Запишем их подробнее и используем условие (4):

$$C^i_{k\beta}C^k_{j\alpha} + C^i_{\gamma j}C^\gamma_{\alpha\beta} + C^i_{k\alpha}C^k_{\beta j} = 0.$$

Перенесем среднее слагаемое вправо, учтем антисимметрию (1_2) и подставим результат в формулу (28):

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = 2C^i_{j\gamma}C^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta.$$

Тогда структурные уравнения (26) принимают вид

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \qquad (29)$$

Внешние дифференциалы форм (17_1) найдем с помощью структурных уравнений (9_1):

$$d\Omega^I_J = 2C^I_{JK}C^K_{LM}\omega^L \wedge \omega^M + \omega^i \wedge \Omega^I_{Ji}, \;\; \Omega^I_{Ji} = 2C^I_{JK}R^K_{ij}\omega^j. \qquad (30)$$

Рассмотрим следующие внешние произведения:

$$\Omega^K_J \wedge \Omega^I_K = 4C^K_{J[L}C^I_{|K|M]}\omega^L \wedge \omega^M. \qquad (31)$$

Представим тождества Якоби (3) в виде

$$C^I_{JK}C^K_{LM} + C^I_{LK}C^K_{MJ} + C^I_{MK}C^K_{JL} = 0,$$

откуда с учетом антисимметрии (1_2) получим:

$$C^I_{JK}C^K_{LM} = C^K_{JL}C^I_{KM} - C^K_{JM}C^I_{KL} = 2C^K_{J[L}C^I_{|K|M]}.$$

Использование этих тождеств в формуле (31) дает 1-е слагаемое структурных уравнений (30_1), поэтому

$$d\Omega^I_J = \Omega^K_J \wedge \Omega^I_K + \omega^k \wedge \Omega^I_{Jk}. \qquad (32)$$

Замкнем дифференциальные уравнения (22_1) с помощью структурных уравнений (13_1, 29, 32):

$$\left(dR^I_{jkl} + R^J_{jkl}\omega^I_J - R^I_{mkl}\omega^m_j - R^I_{jml}\omega^m_k - R^I_{jkm}\theta^m_l + \right.$$
$$\left. + R^J_{jk}\Omega^I_{Jl} - R^I_{jm}\omega^m_{kl} - R^I_{mk}\omega^m_{jl}\right)\wedge \omega^l = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана, используем обозначения (14_1, 17, 27, 30_2):

$$\nabla R^I_{jkl} - 2\left(R^I_{jm}C^m_{k\alpha} + R^I_{mk}C^m_{j\alpha}\right)\omega^\alpha_l \cong 0, \qquad (33)$$

где тензорный дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla R^I_{jkl} = dR^I_{jkl} + R^J_{jkl}\omega^I_J - R^I_{mkl}\omega^m_j - R^I_{jml}\omega^m_k - R^I_{jkm}\omega^m_l.$$

Сравнения (33) примут тензорный вид лишь тогда, когда внетензорная часть обратится в нуль. Запишем это, раскрывая обозначение (17_2) для форм ω^α_l:

$$R^I_{mp}\left(\delta^m_j C^p_{k\alpha} + \delta^p_k C^m_{j\alpha}\right)C^\alpha_{l\beta}\omega^\beta = 0,$$

откуда получается условие

$$\left(\delta^m_j C^p_{k\alpha} + \delta^p_k C^m_{j\alpha}\right)C^\alpha_{\beta l} = 0. \qquad (34)$$

Теорема 5. *Тензор кривизны-кручения R^I_{jk} и его пфаффовы производные R^I_{jkl} образуют тензор $\left\{R^I_{jk}, R^I_{jkl}\right\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (22_1) и сравнениям (33). Производные R^I_{jkl} составляют тензор самостоятельно лишь при выполнении условия (34), тогда они являются ковариантными производными тензора R^I_{jk} относительно связности Картана. Если группа Ли G_{r+n} есть пространство со связностью $H(K)_{r,n}$, то условие (34) выполняется.*

Список литературы

1. *Лумисте Ю. Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69, № 3. С. 434—469.

2. *Евтушик Л. Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера // Геометрия — 3. Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 30. С. 170—204.

3. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

4. *Акивис М. А.* Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности // Сибирский матем. журнал. 1974. Т. 15, № 1. С. 3—15.

5. *Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В.* О плоскостном пространстве проективной связности, обобщающем пространства Картана и Акивиса // Классическая и современная геометрия : матер. Междунар. конф. М., 2019. С. 150—151.

6. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

7. *Ehresmann C.* Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differenttable // Colloque de topologie. Bruxelles, 1950. P. 29—55.

8. *Вагнер В. В.* Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. Вып. 8. М. ; Л., 1950. С. 11—72.

9. *Близникас В. И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский матем. сб. 1966. Т. 6, № 2. С. 141—209.

10. *Шевченко Ю. И.* Связность в составном многообразии и ее продолжение // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 23. Калининград, 1992. С. 110—118.

11. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. Т. 1. М., 1966. С. 139—189.

12. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979.

13. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 46. Калининград, 2015. С. 168—177.

Yu. Shevchenko[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4471-2750
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-18

Curvature-torsion tensor for Cartan connection

Submitted on May 17, 2019

A Lie group containing a subgroup is considered. Such a group is a principal bundle, a typical fiber of this principal bundle is the subgroup and a base is a homogeneous space, which is obtained by factoring the group by the subgroup. Starting from this group, we constructed structure equations of a space with Cartan connection, which generalizes the Cartan point projective connection, Akivis's linear projective connection, and a plane projective connection. Structure equations of this Cartan connection, containing the components of the curvature-torsion object, allowed: 1) to show that the curvature-torsion object forms a tensor containing a torsion tensor; 2) to find an analogue of the Bianchi identities such that the curvature-torsion tensor and its Pfaff derivatives satisfy this analogue; 3) to obtain the conditions for the transformation of Pfaffian derivatives of the curvature-torsion tensor into covariant derivatives with respect to the Cartan connection.

Keywords: Cartan connection, Cartan projective connection, Cartan connection curvature-torsion tensor, analogue of Bianchi identities, covariant derivatives with respect to Cartan connection.

References

1. *Lumiste, Yu. G.:* Connections in homogeneous bundles. Math. Sat., **69**:3, 434—469 (1966) (in Russian).

2. *Evtushik, L. E.:* Cartan connections and the geometry of the Kawaguchi spaces obtained by the moving reference method. Geometry — 3. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. Math and its app. Theme reviews. Moscow. 30, 170—204 (2002) (in Russian).

3. *Cartan, E.:* Spaces of affine, projective, and conformal connection. Kazan (1962) (in Russian).

4. *Akivis, M.A.:* On isoclinic three-webs of their interpretation in the ruled space of projective connection. Siberian Mat. J., **15**:1, 3—15 (1974) (in Russian).

5. *Shevchenko, Yu. I., Skrydlova E.V.:* On the plane space of projective connection, which generalizes the Cartan and Akivis spaces. Classical and modern geometry: materials inters. conf. Moscow. 150—151 (2019) (in Russian).

6. *Kobayashi, Sh.:* Transformation groups in differential geometry. Moscow (1986) (in Russian).

7. *Ehresmann, C.:* Les connexions infinitesimales dans un espace fiber differenttable. Colloque de topologie. Bruxelles. 29—55 (1950).

8. *Vagner, V.V.:* The theory of composite manifolds. Semin. by vect. and tenz. analysis papers, 8, 11—72 (1950) (in Russian).

9. *Bliznikas, V.I.:* Nonholonomic Lie Differentiation and Linear Connections in the Space of Supporting Elements. Lithuanian Math. J., **6**:2, 141—209 (1966) (in Russian).

10. *Shevchenko, Yu.I.:* Connectivity in a composite manifold and its continuation. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 23, 110—118 (1992).

11. *Laptev, G.F.:* Basic infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold, Tr. geom. Semin., 1, 139—189 (1966) (in Russian).

12. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. Problems of geometry, 9 (1979) (in Russian).

13. *Shevchenko, Yu. I.:* Holonomic and semi-holonomic submanifolds of smooth manifolds. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 168—177 (2015) (in Russian).