УДК 514.75

Ю. И. Шевченко

ИЕРАРХИЯ ПОДГРУПП ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ПРИ ИЗОЛИРОВАНИИ ОДНОГО ЗНАЧЕНИЯ ИНДЕКСОВ

Рассмотрены неэффективное, фактор-эффективное и спец-эффективное проективные пространства. В неэффективном проективном пространстве действует линейная группа. При изолировании одного значения индексов в структурных уравнениях Картана линейной группы построена иерархрия семи ее подгрупп.

Non effective, factor-effective and special-effective projective spaces are considered. In an non effective projective space the linear group is acting. When one index value is isolated in the Cartan structure equations of a linear group, the hierarchy of its seven subgroups is constructed.

Ключевые слова: структурные уравнения Картана, неэффективное проективное пространство, линейная группа, иерархия подгрупп.

Key words: structure Cartan equations, non effective projective space, linear group, subgroup hierarchy.

Отнесем $(n+1)$-мерное векторное пространство V_{n+1} к подвижному реперу $\{A_I\}$ с деривационными формулами для базисных векторов A_I:

$$dA_I = \omega_I^J A_J,\ \ I, J, K, \ldots = \overline{0, n}, \tag{1}$$

причем линейные дифференциальные формы ω_J^I удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \tag{2}$$

Это структурные уравнения линейной группы $GL(n+1)$, эффективно действующей в пространстве V_{n+1}. Число структурных форм ω_J^I равно размерности группы:

$$\dim GL(n+1) = (n+1)^2.$$

При факторизации векторного пространства V_{n+1}, когда ненулевые коллинеарные векторы относятся в один класс, получается n-мерное проективное пространство. Действие линейной группы $GL(n+1)$ в этом пространстве неэффективно, что позволяет говорить о неэффективном проективном пространстве P_n. От неэффективности избавляются двумя способами.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 4. С. 5 – 9.

1. Вместо линейной группы $GL(n+1)$ берут ее фактор-группу со структурными формами

$$\theta^i = \omega_0^i, \ \theta_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0, \ \theta_i = \omega_i^0, \ i, j, k, \ldots = \overline{1, n}, \tag{3}$$

которые удовлетворяют структурным уравнениям (см., напр.: [1]):

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i, \ d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \delta_j^i \theta_k \wedge \theta^k + \theta_j \wedge \theta^i, \ d\theta_i = \theta_i^j \wedge \theta_j.$$

Эту фактор-группу называют [2] проективной группой $GP(n)$, размерность которой равна числу форм (3):

$$\dim GP(n) = n(n+2).$$

В проективном пространстве проективная группа $GP(n)$ действует эффективно, поэтому такое пространство назовем *фактор-эффективным проективным пространством* P_n'.

2. В линейной группе $GL(n+1)$ выделяют подгруппу — специальную линейную группу $SGL(n+1)$, определяемую условием $\omega_I^I = 0$, поэтому

$$\dim SGL(n+1) = n(n+2).$$

Это условие по аналогии с условием эквиаффинности называют условием эквипроективности (см.: [3]), хотя лучше говорить об условии проективности [2]. Проективное пространство, в котором эффективно действует специальная линейная группа $SGL(n+1)$, назовем *спец-эффективным проективным пространством*.

Исследуем неэффективное проективное пространство P_n. Как и в обозначении (3), изолируем нулевое значение индексов: $I = (0, i)$, и запишем подробнее деривационные формулы (1) и структурные уравнения (2):

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^i A_i, \ dA_i = \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j; \tag{4}$$

$$d\omega_0^i = \omega_0^0 \wedge \omega_0^i + \omega_0^j \wedge \omega_j^i, \ d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge \omega_0^0 + \omega_i^j \wedge \omega_j^0, \tag{5}$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_j^0 \wedge \omega_0^i, \ d\omega_0^0 = \omega_0^i \wedge \omega_i^0. \tag{6}$$

Деривационные формулы (4_2) и структурные уравнения (5_2) показывают, что вполне интегрируемая система

$$\omega_i^0 = 0 \tag{7}$$

фиксирует гиперплоскость $P_{n-1} = [A_i]$ в пространстве P_n и выделяет в линейной группе $GL(n+1)$ расширенную аффинную группу $G_{n(n+1)+1}$ со структурными уравнениями

$$d\dot\omega_0^i = \dot\omega_0^0 \wedge \dot\omega_0^i + \dot\omega_0^j \wedge \dot\omega_j^i, \ d\dot\omega_j^i = \dot\omega_j^k \wedge \dot\omega_k^i, \ d\dot\omega_0^0 = 0 \ (\dot\omega = \omega|_{(7)}). \tag{8}$$

Эта группа является подгруппой стационарности гиперплоскости $P_{n-1} \subset P_n$. Расширенная аффинная группа $G_{n(n+1)+1}$ имеет линейную фактор-группу $\overline{GL}(n)$ со структурными уравнениями (8_2), действующую неэффективно в гиперплоскости P_{n-1}.

Если в дополнение к системе (7) выполняется уравнение

$$\dot{\omega}_0^0 = 0\,, \tag{9}$$

то в группе $G_{n(n+1)+1}$ появляется аффинная подгруппа $GA(n) = G_{n(n+1)}$:

$$d\ddot{\omega}_0^i = \ddot{\omega}_0^j \wedge \ddot{\omega}_j^i\,,\ d\ddot{\omega}_j^i = \ddot{\omega}_j^k \wedge \ddot{\omega}_k^i\ (\ddot{\omega} = \dot{\omega}|_{(9)})\,.$$

Замечание 1. *Аффинная группа* $GA(n)$ *не имеет непосредственной геометрической характеристики в неэффективном пространстве* P_n, *но является подгруппой стационарности [2] гиперплоскости* P'_{n-1} *в фактор-эффективном пространстве* P'_n.

Если к системе уравнений (7, 9) присоединить уравнения

$$\ddot{\omega}_0^i = 0, \tag{10}$$

то в аффинной группе $GA(n)$ выделится линейная группа $GL(n)$:

$$d\dddot{\omega}_j^i = \dddot{\omega}_j^k \wedge \dddot{\omega}_k^i\ (\dddot{\omega} = \ddot{\omega}|_{(10)})\,.$$

Замечание 2. *Линейная группа* $GL(n)$ *непосредственно не интерпретируется в неэффективном пространстве* P_n, *но в эффективном пространстве* P'_n *она является подгруппой стационарности* 0*-пары* (A_0, P'_{n-1}) [4].

Из деривационной формулы (4_1) и структурных уравнений (5_1) следует, что двойственная системе (7) вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа

$$\omega_0^i = 0 \tag{11}$$

фиксирует точку A_0 и выделяет расширенную коаффинную (центропроективную) подгруппу $G^*_{n(n+1)+1}$ со структурными уравнениями

$$d\overline{\omega}_i^0 = \overline{\omega}_i^0 \wedge \overline{\omega}_0^0 + \overline{\omega}_i^j \wedge \overline{\omega}_j^0\,,\ d\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i\,,\ d\overline{\omega}_0^0 = 0\ \ (\overline{\omega} = \omega|_{(11)})\,, \tag{12}$$

которая является подгруппой стационарности точки A_0 в неэффективном проективном пространстве P_n. Эта группа имеет линейную фактор-группу $\overline{\overline{GL}}(n)$ со структурными уравнениями (12_2), действующую неэффективно в двойственной точке A_0 гиперплоскости P^*_{n-1}.

Дополнительное уравнение

$$\overline{\omega}_0^0 = 0 \tag{13}$$

определяет в группе $G^*_{n(n+1)+1}$ коаффинную (центропроективную) подгруппу $GA^*(n) = G^*_{n(n+1)}$:

$$d\overline{\overline{\omega}}_i^0 = \overline{\overline{\omega}}_i^j \wedge \overline{\overline{\omega}}_j^0,\ d\overline{\overline{\omega}}_j^i = \overline{\overline{\omega}}_j^k \wedge \overline{\overline{\omega}}_k^i\ \ (\overline{\overline{\omega}} = \overline{\omega}\big|_{(13)}),$$

которая служит подгруппой стационарности точки A_0 в эффективном проективном пространстве P'_n. Если, кроме того, $\overline{\overline{\omega}}_i^0 = 0$, что эквивалентно системе уравнений (7, 9, 10), то в коаффинной группе $GA^*(n)$ выделится линейная подгруппа $GL(n)$.

Подставляя пфаффовы уравнения (7, 11) в структурные уравнения (6), получим уравнения расширенной линейной группы L_{n^2+1}:

$$d\dot{\omega}_j^i = \dot{\omega}_j^k \wedge \dot{\omega}_k^i,\ d\dot{\omega}_0^0 = 0\ \ (\dot{\omega} = \omega\big|_{(7,\,11)}),$$

которая служит подгруппой стационарности 0-пары (A_0, P_{n-1}) в неэффективном пространстве P_n. Группа L_{n^2+1} является прямым произведением двух фактор-групп: $\overset{\wedge}{GL}(n)$, действующей неэффективно в гиперплоскости P_{n-1}, и $\overset{\wedge}{GL}(1)$ — группы перенормировок точки A_0.

Наконец, если выполняются условия

$$\dot{\omega}_j^i = 0, \tag{14}$$

то в расширенной линейной группе L_{n^2+1} выделяется линейная группа $GL(1)$ со структурным уравнением

$$d\ddot{\omega}_0^0 = 0\ \ (\ddot{\omega} = \dot{\omega}\big|_{(14)}),$$

которая является ядром неэффективности (см., напр.: [1]) линейной группы $GL(n+1)$, поэтому

$$GP(n) = GL(n+1)/GL(1).$$

Утверждение. *При изолировании одного значения индексов в структурных уравнениях Картана линейной группы* $GL(n+1)$ *возникает следующая иерархия подгрупп:*

$$\begin{array}{ccccc}
GL(n+1) & \supset & G_{n(n+1)+1} & \supset & GA(n) \\
 & & \cup & & \cup \\
GL(1) & \subset & L_{n^2+1} & \supset & GL(n) \\
 & & \cap & & \cap \\
GL(n+1) & \supset & G^*_{n(n+1)+1} & \supset & GA^*(n).
\end{array}$$

Список литературы

1. *Лумисте Ю. Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1965. Вып. 177. С. 6—42.

2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Столяров А. В.* Метод внешних форм Картана и группы Ли. Чебоксары, 1997.

4. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М., 1966.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.–мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

The author

Dr Yuri Shevchenko, Prof., I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru