С л е д с т в и я. I/Прямая $A_3E\,(A_3E^*)$ является касательной к линии $\omega_1-\omega_2=0$ $(\omega_1+\omega_2=0)$ на квадрике (26). 2/Точками пересечения прямой A_3A_4 с квадриками (26) и (27) (отличными от точек A_3 и P^*) являются точки

$$K_1=\rho A_3-2bA_4, \quad K_2=\rho A_3-3bA_4. \tag{29}$$

3/Точки A_1 и A_2 являются сдвоенными характеристическими точками коники Φ [2].

Действительно,

$$d\Phi\equiv x^1x^2(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)=0.$$

Исключая семейство линий $\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4=0$, вдоль которого коника Φ неподвижна в плоскости $x^3=0$, мы получаем, что вдоль любого другого направления коника (28) имеет сдвоенные характеристические точки A_i.

Литература

I.С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, I956.

2.Малаховский В.С., Конгруэнции кривых второго порядка, плоскости которых образуют однопараметрическое семейство. Геом.сб., вып.3, Труды Томского ун-та, т.I68, I963, 6I-65.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 I974

С к р ы д л о в а Е.В.

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(C\mathcal{L})_{1,2}$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ -вырожденные конгруэнции [I] пар фигур, порожденные коникой C и прямой $\mathcal{L}$, не имеющей с коникой общих точек и не лежащей в плоскости коники. В конгруэнциях $(C\mathcal{L})_{1,2}$ коники C образуют однопараметрическое семейство, а прямые $\mathcal{L}$ —двупараметрическое (прямолинейную конгруэнцию). Построен геометрически фиксированный репер конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$, подробно исследованы некоторые частные классы конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

§I. Репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

В конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ каждой прямой $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ соответствует единственная коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$.

Пусть N —точка пересечения прямой $\mathcal{L}$ с плоскостью соответствующей ей коники C. В дальнейшем ограничимся рассмотрением конгруэнций $(C\mathcal{L})_{1,2}$ общего типа, а именно когда:

1/ N не инцидентна характеристике плоскости коники C,

2/ N не является фокальной точкой луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$,

3/касательная плоскость к поверхности (N) не проходит через точки A_i, $(i,j,k=1,2)$ репера R.

Отнесем конгруэнцию $(C\mathcal{L})_{1,2}$ к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4)$,деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β -формы Пфаффа,удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0. \tag{1.3}$$

Пусть вершина A_3 репера R совпадает с точкой N,A_1 и A_2 инцидентны конике C и полярно сопряжены N относительно коники C ,вершина A_4 вместе с точкой N гармонически разделяет фокусы луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$.

В силу допущенных исключений ,имеем:

$$\omega_3^1\wedge\omega_3^2\neq 0, \quad \omega_3^4\neq 0, \tag{1.4}$$

следовательно,формы Пфаффа

$$\omega_3^i=\omega^i \tag{1.5}$$

можно принять в качестве базисных линейно независимых форм конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

Уравнения коники C с учетом соответствующей нормировки вершин и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ в репере R запишутся соответственно в виде:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0; \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^4, \quad \omega_i^3=a_i\omega_3^4+\omega^j, \quad \omega_i^4=b_i\omega_3^4,\\ \omega_3^4=\Gamma_{3k}^4\omega^k, \quad \omega_4^i=\Gamma_{4j}^i\omega^j+(-1)^j\mu\omega^i,\\ \omega_4^3=\Gamma_{4k}^3\omega^k, \quad 2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=p\omega_3^4.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь и далее суммирование по индексам i,j не производится, $i\neq j$.Исследуя систему (I 7),убеждаемся,что конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а I. Касательная плоскость к поверхности (A_3) пересекает прямую A_1A_2 в точке,которая вместе с вершинами A_1,A_2 и одним из фокусов луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) образует гармоническую четверку.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Координаты s,t фокусов sA_1+tA_2 луча A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2) находятся из уравнения

$$(b_1s+b_2t)(\Gamma_{32}^4t-\Gamma_{31}^4s)=0, \tag{1.8}$$

т.е.точка

$$F=\Gamma_{32}^4A_1+\Gamma_{31}^4A_2 \tag{1.9}$$

является фокальной,а

$$F^{*}=\Gamma_{32}^{4}A_1-\Gamma_{31}^{4}A_2 \qquad (1.10)$$

-четвертой гармонической ей относительно вершин A_1 и A_2.

Касательная плоскость поверхности (A_3) в точке A_3 задается точками

$$A_3,\ \bar{A}=A_1+\Gamma_{31}^{4}A_4,\ \ \bar{\bar{A}}=A_2+\Gamma_{32}^{4}A_4. \qquad (1.11)$$

Имеем

$$(A_3\bar{A}\bar{\bar{A}}F^{*})=0, \qquad (1.12)$$

что и требовалось доказать.

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка E_{12} прямой A_1A_2 совпадала с фокусом F луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2). В этом случае будем иметь

$$\Gamma_{31}^{4}=\Gamma_{32}^{4}=\gamma, \qquad (1.13)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\lambda_\kappa\omega^\kappa. \qquad (1.14)$$

§2. Условия инцидентности всех коник однопараметрического семейства (C) инвариантной квадрике.

Поставим задачу-найти условия, при которых все коники однопараметрического семейства (C) принадлежат некоторой инвариантной квадрике Q. Уравнение такой квадрики в общем случае может быть записано в виде

$$Q=(x^3)^2-2x^1x^2+2(a_{14}x^1+a_{24}x^2+a_{34}x^3+\tfrac{1}{2}a_{44}x^4)x^4=0. \qquad (2.1)$$

Дифференцируя уравнение (2.1) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha=-x^\beta\omega_\beta^\alpha+\theta x^\alpha,\quad (\mathcal{D}\theta=0), \qquad (2.2)$$

получим условия инвариантности квадрики

$$\Gamma_i^j-a_{i4}b_i=0, \qquad (2.3)$$

$$a_i+a_{i4}+b_ia_{34}=0, \qquad (2.4)$$

$$p+a_{14}b_2+a_{24}b_1+2a_{34}=0, \qquad (2.5)$$

$$da_{i4}+\omega_4^j+a_{i4}(2\omega_3^3-\omega_i^i-\omega_4^4)-a_{j4}\omega_i^j-a_{34}\omega_i^3-$$
$$-a_{44}\omega_i^4+2a_{i4}a_{34}\omega_3^4=0, \qquad (2.6)$$

$$da_{34}-\omega_4^3-a_{\kappa4}\omega^\kappa+a_{34}(\omega_3^3-\omega_4^4)-a_{44}\omega_3^4+2(a_{34})^2\omega_3^4=0, \qquad (2.7)$$

$$\tfrac{1}{2}da_{44}-a_{\kappa4}\omega_4^\kappa-a_{34}\omega_4^3+a_{44}(\omega_3^3-\omega_4^4)+a_{34}a_{44}\omega_3^4=0. \qquad (2.8)$$

Условия (2.3)-(2.8) полностью определяют коэффициенты $a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ квадрики Q и специализируют определенным образом семейство (C) коник C.

Осуществляя замыкание и продолжение системы уравнений (I.7),(2.3)-(2.8), находим, что конгруэнции $(C\mathcal{I})_{1,2}$, у которых все коники C однопараметрического семейства (C) принадлежат некоторой инвариантной квадрике Q, существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

§3. Конгруэнции $(C\mathcal{I})_{1,2}^{Q}$

О п р е д е л е н и е I, Конгруэнциями $(C\mathcal{I})_{1,2}^{Q}$ называются конгруэнции $(C\mathcal{I})_{1,2}$, обладающие следующими свойствами: I/все коники C семейства (C) принадлежат квадрике Q, относительно которой прямые A_1A_2 и $\mathcal{L}$ находятся в полярном соответствии; 2/пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и $(\mathcal{L})$ расслояема [5] в направлении от $(\mathcal{L})$ к (A_1A_2); 3/поверхность (A_4) касается плоскости $(A_1A_2A_4)$ в точке A_4.

Для конгруэнций $(C\mathcal{L})^Q_{1,2}$ выполняются равенства

$$a_{i4} = 0, \tag{3.1}$$

тогда из соотношений (2,3)-(2.5) получим

$$\Gamma^j_i = 0, \quad a_i + b_i\omega^4_3 = 0, \quad p + 2a_{34} = 0. \tag{3.2}$$

Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) приводятся к виду

$$\omega^1_4 \wedge \omega^2 + \omega^2_4 \wedge \omega^1 = 0, \tag{3.3}$$

$$\omega^1_4 \wedge \omega^4_1 + \omega^2_4 \wedge \omega^4_2 = 0, \tag{3.4}$$

$$\omega^1 \wedge \omega^4_1 + \omega^2 \wedge \omega^4_2 = 0, \tag{3.5}$$

откуда будем иметь

$$\mu = 0, \tag{3.6}$$

$$b_1 = b_2 = b. \tag{3.7}$$

Уравнения (2.6) с учетом равенств (3.I),(3.2.),(3.6),(3.7) дают

$$\left(a_{44} - \frac{p^2}{4}\right) b\gamma = \frac{p}{2}, \tag{3.8}$$

$$\omega^1_4 = \frac{p}{2}\omega^2, \qquad \omega^2_4 = \frac{p}{2}\omega^1. \tag{3.9}$$

Условие 3 определения I аналитически записывается в виде

$$\omega^3_4 = 0. \tag{3.10}$$

Замыкая уравнения (3.9) совместно с

$$\omega^4_1 = \omega^4_2, \tag{3.11}$$

получим

$$b(\omega^1_1 - \omega^2_2) = \omega^1 - \omega^2. \tag{3.12}$$

Последнюю нормировку вершин репера R осуществим таким образом, чтобы

$$p = 2, \tag{3.13}$$

при этом единичная точка $E_{34} = A_3 + A_4$ прямой A_3A_4 совмещается с фокусом луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$.

Из уравнений (2.7),(2.8) с учетом (3.2),(3.I0),(3.I3) будем иметь

$$\omega^3_3 - \omega^4_4 = (2 - a_{44})\omega^4_3, \tag{3.14}$$

$$da_{44} + 2a_{44}(1 - a_{44})\omega^4_3 = 0. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.8) при нормировке (3.I3) дает

$$\gamma = \frac{1}{b(a_{44} - 1)}, \tag{3.16}$$

тогда

$$\omega^4_3 = \frac{1}{b(a_{44} - 1)}(\omega^1 + \omega^2). \tag{3.17}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $(C\mathcal{L})^Q_{1,2}$ записывается в виде

$$\begin{gathered}\omega^j_i = 0, \quad \omega^3_i = \omega^4_i + \omega^j, \quad \omega^4_i = b\omega^4_3, \quad \omega^i_4 = \omega^j, \\ \omega^3_4 = 0, \quad \omega^4_3 = \frac{1}{b(a_{44} - 1)}(\omega^1 + \omega^2), \quad 2\omega^3_3 - \omega^1_1 - \omega^2_2 = 2\omega^4_3, \\ b(\omega^1_1 - \omega^2_2) = \omega^1 - \omega^2, \quad \omega^3_3 - \omega^4_4 = (2 - a_{44})\omega^4_3.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Продолжая систему (3.18), получим

$$d\beta + (\beta^2 - \tfrac{1}{2})(\omega^1 + \omega^2) = 0. \qquad (3.19)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $(C\mathcal{L})^{Q}_{1,2}$ определяются вполне интегрируемой системой пфаффовых уравнений (3.15), (3.18), (3.19).

Квадрика Q, инцидентная всем коникам C семейства (C), имеет вид:

$$Q = (x^3)^2 - 2x^1x^2 - 2x^3x^4 + a_{44}(x^4)^2 = 0. \qquad (3.20)$$

Обозначим

$$E^*_{12} = A_1 - A_2, \quad E^*_{34} = A_3 - A_4 \quad - \qquad (3.21)$$

— точки, которые вместе с точками E_{12} и E_{34}, вершинами репера A_1, A_2 и A_3, A_4 соответственно образуют гармонические четверки.

Т е о р е м а 3. Конгруэнции $(C\mathcal{L})^{Q}_{12}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) вместе с точками A_1 и A_2 образуют гармоническую четверку; 2/пара прямолинейных конгруэнций $(E_{12}E_{34})$ и $(E^*_{12}E^*_{34})$ расслояема в направлении от $(E_{12}E_{34})$ к $(E^*_{12}E^*_{34})$; 3/плоскости коник C образуют пучок; 4/одна из фокальных поверхностей луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ вырождается в линию; 5/линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$ является торсом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Фокусы $sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнением

$$s^2 - t^2 = 0, \qquad (3.22)$$

следовательно, вместе с точками A_1 и A_2 они образуют гармоническую четверку. 2/Условия расслоения от прямолинейной конгруэнции $(E_{12}E_{34})$ к прямолинейной конгруэнции $(E^*_{12}E^*_{34})$

$$\begin{gathered}
2\omega_3^4 \wedge (\omega_4^1 + \omega_4^2) + (\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge (\omega_3^2 - \omega_3^1 + \omega_4^2 - \omega_4^1) + \\
+ (\omega_3^3 - \omega_4^4) \wedge (\omega_3^1 + \omega_3^2 - \omega_4^1 - \omega_4^2) = 0, \\
\omega_3^1 \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4 - \omega_1^3 + \omega_2^3) + \omega_3^2 \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^3 - \omega_2^3) + \\
+ \omega_4^1 \wedge (-\omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^3 + \omega_2^3) + \omega_4^2 \wedge (\omega_1^4 - \omega_2^4 + \omega_1^3 + \omega_2^3) = 0, \\
2(\omega_1^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^4 + (-\omega_1^3 + \omega_2^3 - \omega_1^4 + \omega_2^4) \wedge (\omega_1^1 - \omega_2^2) + \\
+ (\omega_1^3 + \omega_2^3 - \omega_1^4 - \omega_2^4) \wedge (\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0.
\end{gathered} \qquad (3.23)$$

в силу системы (3.18) удовлетворяются тождественно. 3/Характеристика плоскости коники C

$$\beta(x^1 + x^2) + x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \qquad (3.24)$$

может быть задана точками E^*_{12} и $M = A_2 - \beta A_3$. Имеем

$$d[E^*_{12}M] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \beta\omega^1 - \beta\omega^2)[E^*_{12}M], \qquad (3.25)$$

т.е. характеристика неподвижна и плоскости коник C образуют пучок. 4/Точка E_{34} является фокусом луча $\mathcal{L}$ прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$, причем

$$dE_{34} = \omega_3^3 E_{34} + \left[\frac{3 - a_{44}}{\beta(a_{44} - 1)} A_4 + E_{12}\right](\omega^1 + \omega^2), \qquad (3.26)$$

что и требовалось доказать. 5/Линейчатая поверхность $(\mathcal{L})_C$ и торсы прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ задаются соответственно уравнениями

$$\omega_3^4 = 0, \tag{3.27}$$

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0. \tag{3.28}$$

Сравнивая (3.27),(3.28) , убеждаемся, что $(\mathcal{L})_c$-торс. Теорема доказана.

Рассмотрим конгруэнцию (C_1) коник C_1 , определяемых уравнениями

$$Q = 0, \quad x^3 = 0. \tag{3.29}$$

Т е о р е м а 4. I/Точки A_i и точки пересечения коники C_1 с прямой $E_{12}A_4$ являются фокальными точками коники C_1 , причем фокусы A_i сдвоены, 2/конгруэнция (C_1) коник C_1 расслояема [2],[3] к характеристике семейства плоскостей коник C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений для определения фокальных точек коники C_1 имеет вид:

$$x^1 x^2 (x^1 - x^2) = 0, \quad x^3 = 0, \qquad a_{44}(x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0. \tag{3.30}$$

Разрешая эту систему, получим: а/ $x^i = 0$, т.е. точка A_j является сдвоенным фокусом, б/ $x^1 - x^2 = 0$, в этом случае фокальными являются точки $E_{12} \pm \sqrt{\frac{2}{a_{44}}}A_4$, что и требовалось доказать.

2/Условия расслоения от конгруэнции (C_1) коник C_1 к характеристике семейства плоскостей коник C имеют вид:

$$b(\omega_2^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_2^4) - \omega_2^3 \wedge \omega_2^4 = 0,$$

$$db \wedge \omega_2^3 - 2b^2(\omega_4^1 + \omega_4^2) \wedge \omega_2^4 + b[b\mathcal{D}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \mathcal{D}\omega_2^3] = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{b\,da_{44}}{2} \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4) + \frac{1}{2}ba_{44}\mathcal{D}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - b\mathcal{D}(\omega_4^1 + \omega_4^2) - \\ &- b\,da_{44} \wedge \omega_2^4 + \frac{3}{2}a_{44}[b(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] \wedge \omega_2^4 - \frac{ba_{44}}{2}\mathcal{D}\omega_2^4 + \\ &+ \left[\frac{1}{2}a_{44}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - (\omega_4^1 + \omega_4^2)\right] \wedge [b(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}b\,da_{44} \wedge [b(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \omega_1^3 + \omega_2^3] + \frac{1}{2}b\,da_{44}\mathcal{D}(\omega_2^3 - \omega_1^3) + \\ &+ \frac{1}{2}b^2a_{44}\mathcal{D}(\omega_2^2 - \omega_1^1) - \frac{1}{2}a_{44}\,db \wedge (\omega_2^3 - \omega_1^3) + \\ &+ a_{44}[b(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] \wedge [b(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3] = 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}b\,da_{44} \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^4) + \frac{1}{2}ba_{44}\mathcal{D}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - b\mathcal{D}(\omega_4^1 + \omega_4^2) - \\ &- b\,da_{44} \wedge \omega_1^4 + \frac{3}{2}a_{44}\left[\frac{b}{2}(\omega_4^4 - \omega_2^2) - \omega_2^3\right] \wedge \omega_1^4 - \frac{1}{2}ba_{44}\mathcal{D}\omega_1^4 + \\ &+ \left[\frac{1}{2}a_{44}(\omega_1^4 + \omega_2^4) - (\omega_4^1 + \omega_4^2)\right] \wedge [b(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \omega_1^3] = 0, \end{aligned}$$

$$db \wedge \omega_1^3 - 2b^2(\omega_4^1 + \omega_4^2) \wedge \omega_1^4 + b[b\mathcal{D}(\omega_4^4 - \omega_1^1) - \mathcal{D}\omega_1^3] = 0,$$

$$b(\omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4) - \omega_1^3 \wedge \omega_1^4 = 0,$$

где $\mathcal{D}$ -символ внешнего дифференцирования.

В силу системы (3.I8) уравнения (3.3I) удовлетворяются тождественно, что и доказывает утверждение теоремы.

§4. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$.

Определение 2. Расслояемыми конгруэнциями $(C\mathcal{L})_{1,2}$ называются конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$, для которых: 1/пары прямолинейных конгруэнций $(E_{12}A_3)$, (A_iA_4) расслояемы в направлении от $(E_{12}A_3)$ к (A_iA_4); 2/характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$ принадлежат прямой $\mathcal{L}$; 3/прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) является параболической.

Теорема 5. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Доказательство. Аналитически условия определения 2 записываются в виде

$$(\omega^i-\omega^j)\wedge\omega^3_j+(\omega^j_j-\omega^i_i)\wedge\omega^i_j+(\omega^4_i+\omega^4_j)\wedge\omega^i_4-\omega^4_3\wedge\omega^3_4=0, \quad (4.1)$$

$$\omega^j_i\wedge(\omega^j-\omega^i)+\omega^4_3\wedge\omega^j_4=0, \quad (4.2)$$

$$\omega^3_i\wedge(\omega^i_i-\omega^j_j)-\omega^j_i\wedge\omega^i-\omega^i_j\wedge\omega^j-(\omega^4_i+\omega^4_j)\wedge\omega^3_4=0, \quad (4.3)$$

$$\Gamma^i_{4j}=0, \quad (4.4)$$

$$b_1=-b_2=b, \quad (4.5)$$

причем, в силу невырождения конгруэнций (A_iA_4) в линейчатые поверхности

$$rang\,(\omega^j_i,\ \omega^3_i,\ \omega^j_4,\ \omega^3_4)=2. \quad (4.6)$$

В силу (4.4), (4.5) имеем

$$\omega^1_4=\mu\omega^1,\quad \omega^2_4=-\mu\omega^2, \quad (4.7)$$

$$\omega^4_1+\omega^4_2=0. \quad (4.8)$$

Учитывая (4.7) в (4.2) получим

$$\omega^2_1=\frac{1}{2}\mu\omega^4_3,\quad \omega^1_2=-\frac{1}{2}\mu\omega^4_3. \quad (4.9)$$

Разность уравнений (4.I) с учетом (4.9) приводится к виду:

$$\gamma(a_1+a_2)+1=0, \quad (4.10)$$

откуда

$$\omega^3_1+\omega^3_2=0. \quad (4.11)$$

Продолжая уравнения (4.7), (4.8), будем иметь:

$$d\mu+\mu(\omega^3_3-\omega^4_4)+\Gamma^3_{41}\omega^1-\Gamma^3_{42}\omega^2=0, \quad (4.12)$$

$$\omega^1_1-\omega^2_2=\lambda\omega^4_3. \quad (4.13)$$

При внешнем дифференцировании уравнений (4.9) получаем квадратичные уравнения

$$(-\Gamma^3_{41}\omega^1+\Gamma^3_{42}\omega^2)\wedge\omega^4_3+\mu(\omega^1-\omega^2)\wedge\omega^4_1+2(b\mu-a_1)\omega^4_3\wedge\omega^2=0, \quad (4.14)$$

$$\omega^3_1\wedge(\omega^1-\omega^2)=0. \quad (4.15)$$

Из (4.I5) следует равенство

$$2\gamma a_1+1=0, \quad (4.16)$$

тогда

$$\omega^3_i=\frac{1}{2}(\omega^j-\omega^i). \quad (4.17)$$

Из уравнений (4.I), (4.3) при этом получим

$$\omega_4^3 = \alpha\,\omega_3^4, \tag{4.18}$$

$$\lambda = \mu, \tag{4.19}$$

то есть

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = \mu\,\omega_3^4 \tag{4.20}$$

Уравнение (4.I4) теперь приводит к соотношению

$$4\mu\beta\gamma - 2\gamma^2\alpha + 1 = 0. \tag{4.21}$$

Замыкая уравнения (4.I7), получим

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0. \tag{4.22}$$

Последнюю нормировку вершин репера осуществим таким образом, чтобы

$$\mu = 1, \tag{4.23}$$

тогда

$$\omega_3^3 - \omega_4^4 = \alpha\gamma\,(\omega^2 - \omega^1). \tag{4.24}$$

Обозначим

$$\alpha\gamma = \varphi. \tag{4.25}$$

Учитывая (4.2I), будем иметь

$$\omega_4^3 = \varphi\,(\omega^1 + \omega^2), \tag{4.26}$$

$$\omega_4^4 - \omega_3^3 = \varphi\,(\omega^1 - \omega^2), \tag{4.27}$$

$$\omega_1^4 = \frac{1}{2}\varphi\,\omega_3^4 - \frac{1}{4}(\omega^1 + \omega^2). \tag{4.28}$$

Продолжая систему (4.26)–(4.28), получим

$$d\varphi + \left(\varphi^2 + \frac{1}{2}\right)(\omega^2 - \omega^1) = 0, \tag{4.29}$$

$$\gamma + \gamma\varphi^2 - \frac{\varphi}{2} = 0, \tag{4.30}$$

откуда

$$\omega_3^4 = \frac{\varphi}{2(1+\varphi^2)}\,(\omega^1 + \omega^2). \tag{4.31}$$

Замыкание уравнения (4.3I) приводит к соотношению

$$1 + 2\varphi^2 = 0. \tag{4.32}$$

Из (4.30),(4.32) следует

$$\varphi = \gamma. \tag{4.33}$$

Таким образом, расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = \frac{1}{2}(-1)^j\omega_3^4, \quad \omega_i^3 = \frac{1}{2}(\omega^j - \omega^i), \quad \omega_i^4 = \frac{1}{2}(-1)^i(\omega^i + \omega^j),$$

$$\omega_3^4 = \varphi(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_4^i = (-1)^j\omega^i, \quad \omega_4^3 = \omega_3^4, \tag{4.34}$$

$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega_3^4, \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = \varphi(\omega^1 - \omega^2),$$

где φ определяется соотношением (4.32).

Система (4.34) является вполне интегрируемой, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 6. Расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{1,2}$ обладают следующими геометрическими свойствами: I/прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) является связкой прямых с центром в точке E_{12}; 2/характеристика плоскости коники C неподвижна и касается коники C; 3/прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) расслояема к прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$, 4/сложные отношения точек, образуемые на прямых A_iA_4 вершинами репера и точками пересечения этих прямых с касательными плоскостями к поверхностям (A_j) и (A_3), равны, 5/касательные плоскости к поверхностям $(A_1),(A_2),(A_3)$ инцидентны одной прямой

A_3K, где $K=A_1+A_2+2\varphi A_4$; касательные к линии $\omega^1-\omega^2=0$ на поверхностях $(A_1),(A_2),(A_3)$ пересекаются в точке K, поверхность (K) вырождается в линию, 6/поверхности (A_3) и (A_4) -плоские, 7/прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{L})$ является конгруэнцией W^* [4].

Доказательство. I/Имеем

$$dE_{12}=(\omega_1^1+\omega_2^1)E_{12}, \tag{4.35}$$

так как

$$d[A_1A_2]=(\omega_1^1+\omega_2^2)[A_1A_2]+\omega_1^3[A_3E_{12}]+\omega_1^4[A_4E_{12}] \tag{4.36}$$

и

$$\operatorname{rang}(\omega_1^3,\omega_1^4)=2, \tag{4.37}$$

то семейство (A_1A_2)-связка. 2/Характеристика плоскости коники C

$$x^1-x^2-2\varphi x^3=0,\quad x^4=0 \tag{4.38}$$

имеет полюсом относительно коники точку

$$P=A_1-A_2-2\varphi A_3, \tag{4.39}$$

причем P принадлежит конике. Следовательно, коника C касается характеристики в точке P. Так как характеристика проходит через неподвижную точку E_{12} и

$$dP=(\omega_1^1+\omega_1^2-2\varphi\omega_3^1)P, \tag{4.40}$$

то она неподвижна. 3/Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$

$$\omega_2^3\wedge\omega^1+\omega_2^4\wedge\omega_4^1=0,$$

$$\omega_1^3\wedge\omega^1+\omega_1^4\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega^2-\omega_2^4\wedge\omega_4^2=0, \tag{4.41}$$

$$\omega_1^3\wedge\omega^2+\omega_1^4\wedge\omega_4^2=0,$$

в силу системы (4.34) удовлетворяются тождественно. 4/Имеем

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\tfrac{1}{2}[(\omega^j-\omega^i)A_3+(-1)^j(\omega^i+\omega^j)B_i], \tag{4.42}$$

где

$$dA_3=\omega_3^3A_3+\omega^kC_k, \tag{4.43}$$

$$B_i=\varphi A_j-A_4,\quad C_i=A_i+\varphi A_4. \tag{4.44}$$

Утверждение теоремы доказывает равенство

$$(B_1,C_2;A_2,A_4)=(B_2,C_1;A_1A_4)=2 \tag{4.45}$$

5/Справедливость утверждения следует из формул (4.42)-(4.44) и следующих

$$dA_i\Big|_{\omega^1-\omega^2=0}=(\ldots)A_i+\frac{(-1)^i}{\varphi}\omega^iK, \tag{4.46}$$

$$dA_3\Big|_{\omega^1-\omega^2=0}=\omega_3^3A_3+\omega^1K, \tag{4.47}$$

$$dK=(\omega_1^1+\omega_2^2+2\varphi\omega_4^1)K+(\omega^1+\omega^2)(A_4-A_3-2\varphi A_2). \tag{4.48}$$

6/Имеем

$$dA_4=\omega_4^4A_4+\omega^k\mathcal{D}_k, \tag{4.49}$$

где

$$\mathcal{D}_i=(-1)^jA_i+\varphi A_3. \tag{4.50}$$

Так как

$$d\,[A_3 C_1 C_2] = -\omega_3^3\,[A_3 C_1 C_2]\,, \qquad (4.51)$$

$$d[A_4 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2] = (2\,\omega_4^4 - \omega_3^3)[A_4 \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2]\,, \qquad (4.52)$$

то поверхности (A_3) и (A_4) являются плоскостями. 7/Фокальные поверхности (F_i) прямолинейной конгруэнции $(\mathcal{L})$ описываются точками

$$F_1 = E_{34}\ , \quad F_2 = E^{*}_{34}\ . \qquad (4.53)$$

Асимптотические линии на этих поверхностях задаются одним и тем же уравнением

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = 0\,, \qquad (4.54)$$

следовательно, прямолинейная конгруэнция $(\mathcal{L})$ является конгруэнцией W . Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а.

I. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, I973, 4I-49.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом.семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, I97I, т.3, I93-220.

3. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, I97I, 43-54.

4. Фиников С.П., Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М., I950.

5. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., I956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5
I974

С к р ы л о в а Е.В.

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ $(C\mathcal{L})_{2,1}$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ пар фигур-коник C и прямых $\mathcal{L}$, в которых семейство (C) коник C является двупараметрическим (конгруэнцией), а семейство $(\mathcal{L})$ прямых $\mathcal{L}$ - однопараметрическим (линейчатой поверхностью) [I].

В конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$ каждой конике C конгруэнции (C) соответствует единственная прямая $\mathcal{L}$ линейчатой поверхности $(\mathcal{L})$, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство $(C)_{\mathcal{L}}$ коник C .

Построен геометрически фиксированный репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$. Исследованы расслояемые конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$.

§I. Репер конгруэнции $(C\mathcal{L})_{2,1}$.

Отнесем конгруэнцию $(C\mathcal{L})_{2,1}$ к реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$, в котором вершина A_3 является точкой пересечения плоскости коники C с соответствующей ей прямой $\mathcal{L}$, вершины A_i $(i,j,k=1,2)$ инцидентны конике C и полярно сопряжены точке A_3 относительно коники C , вершина A_4 расположена на прямой $\mathcal{L}$.