ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

М а л а х о в с к и й В.С.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур имеет предметом своих исследований многообразия, образующим элементом которых являются фигуры, отличные от точки исходного пространства. Исследование обобщенных пространств составляет основной раздел современной дифференциальной геометрии. Геометрия обобщенных пространств широко используется в теоретической механике, физике и прикладных науках. Переход от точки к фигуре в качестве образующего элемента многообразия открывает широкие возможности построения теории обобщенных пространств и получения новых результатов в классических областях дифференциальной геометрии.

В работе дана краткая характеристика основных направлений исследований калининградских геометров по дифференциальной геометрии многообразий фигур и рассмотрены некоторые проблемы в этой области геометрии.

§I. Геометрические объекты и фигуры в n-мерном однородном пространстве.

Рассмотрим n-мерное однородное пространство E_n с

фундаментальной r-членной группой Ли $\mathcal{G}$, определяемой линейно независимыми формами Пфаффа $\theta^s(u^p, du^q)$ и структурными постоянными C^s_{pq} $(p, q, s = 1, 2, \dots, r)$.

Как известно ([I], стр.294), геометрическим объектом Φ ранга N пространства E_n называется точка N-мерного пространства $\overset{*}{E}_N$ представления группы $\mathcal{G}$ в предположении, что все пространства представления группы $\mathcal{G}$ отнесены к семейству реперов заданного однородного пространства E_n. Относительные координаты $a^{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1, \dots, N)$ точки $\Phi \in \overset{*}{E}_N$ называются компонентами геометрического объекта.

Аналитически геометрический объект $\Phi = \{a^{\mathcal{I}}\}$ можно задать формулами

$$\tilde{a}^{\mathcal{I}} = \mathcal{F}(a, u) \tag{1.1}$$

преобразования его компонент $a^{\mathcal{I}}$ при переходе от одного репера к другому, либо вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{I}} \equiv da^{\mathcal{I}} - f^{\mathcal{I}}_s(a)\,\theta^s(u, du) = 0, \tag{1.2}$$

где

$$f^{\mathcal{I}}_s(a) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\mathcal{I}}}{\partial u^s}\right)_{u=0}, \tag{1.3}$$

причем

$$\frac{\partial f^{\mathcal{I}}_p}{\partial a^{\mathcal{K}}} f^{\mathcal{K}}_q - \frac{\partial f^{\mathcal{I}}_q}{\partial a^{\mathcal{K}}} f^{\mathcal{K}}_p = C^s_{pq} f^{\mathcal{I}}_s \tag{1.4}$$

При фиксированных значениях компонент $a^{\mathcal{J}}$ геометрического объекта Φ вполне интегрируемая система уравнений Пфаффа $\omega^{\mathcal{J}}=0$, $\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa}=0$, ..., $\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_m}=0$ $(m=1,2\dots)$, (1.5)

где

$$\omega^{\mathcal{J}}=-f^{\mathcal{J}}_s(a)\,\theta^s(u,du),\quad \omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa}=-\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\varkappa}}\,\theta^s(u,du),\dots,$$

$$,\dots,\ \omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_m}=-\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\varkappa_1}\dots\partial a^{\varkappa_m}}\,\theta^s(u,du) \qquad (1.6)$$

определяет r_m -членную группу Ли H_{r_m} –подгруппу стационарной подгруппы $H=H_{r_0}$ геометрического объекта Φ. Геометрический объект $\Phi=\{a^{\mathcal{J}}\}$ охватывает геометрический объект $\Psi=\{b^{\hat{\mathcal{J}}}\}$ $(\hat{\mathcal{J}},\hat{j},\varkappa=1,\dots,\hat{N})$, если компоненты $b^{\hat{\mathcal{J}}}$ являются функциями компонент $a^{\mathcal{J}}$ ([I],стр.300). В этом случае говорят также,что геометрический объект Ψ охватывается геометрическим объектом Φ. Два геометрических объекта Φ и $\tilde{\Phi}$ называются подобными,если каждый из них охватывает другой. Подобные геометрические объекты являются точками изоморфных пространств представления группы $\mathcal{G}$.

Подмножество F пространства E_n называется фигурой этого пространства,если его можно включить в систему $R(F)$ подмножеств пространства E_n, изоморфную некоторому конечномерному пространству представления группы $\mathcal{G}$ ([2],стр.7).

Из этого определения следует,что каждой фигуре F пространства E_n соответствует класс подобных геометрических объектов: $F=\{\Phi\}$.

В теории геометрических объектов и фигур возникают следующие проблемы,представляющие интерес для дифференциальной геометрии многообразий фигур.

I.Определение арифметических инвариантов геометрического объекта и фигуры.

2.Выделение геометрических объектов различных типов из класса подобных объектов.

3.Определение фигуры однородного пространства по заданному геометрическому объекту.

4.Построение с помощью фигур ненулевого жанра ([3], стр.I82) расширений фундаментальной группы $\mathcal{G}$.

5.Классификация фигур и пар фигур в однородном пространстве.

Рассмотрим каждую проблему в отдельности.

I.К настоящему времени известны четыре арифметических инварианта геометрического объекта Φ : ранг $\mathcal{N}$, равный размерности пространства $\overset{*}{E}_{\mathcal{N}}$ представления группы $\mathcal{G}$, точкой которого является объект Φ; жанр$=\mathcal{N}-R$, где R - ранг матрицы $\| f^{\mathcal{J}}_s \|$, совпадающий ([2],стр.6) с числом независимых абсолютных инвариантов геометрического объекта Φ относительно преобразований фундаментальной группы $\mathcal{G}$; характеристика λ –наименьшее неотрицательное число,для которого подгруппа H_{r_λ} совпадает со всеми подгруппами $H_{r_{\lambda+i}}$ (i-произвольное натуральное число) и тип $\varkappa$ -число,равное единице,если подгруппа H_{r_λ} единичная и равное двум,если подгруппа H_{r_λ} не является единичной.Эти четыре инварианта независимые и не меняют своих значений при переходе от геометрического объекта Φ к произвольному подобному ему геометрическому объекту $\tilde{\Phi}$. Следовательно,все они являются арифметическими инвариантами фигуры F [3].

Представляет интерес отыскание новых независимых арифметических инвариантов геометрического объекта Φ или доказательство того, что таких инвариантов не существует.

2. Для аналитической характеристики фигуры F пространства E_n целесообразно воспользоваться наиболее простыми геометрическими объектами из класса $\{\Phi\}$ подобных геометрических объектов. Всякую фигуру ненулевого жанра ρ можно задать специально координированным геометрическим объектом $\Phi_0 \in \{\Phi\}$, у которого ρ первых компонент b^{s_0} $(s_0, p_0, q_0 = -\rho+1, \dots, 0)$ являются абсолютными инвариантами ([2], стр.7).

Например, окружность

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_0 = 0 \qquad (1.7)$$

на евклидовой плоскости E_2 можно задать не только геометрическим объектом $\Phi = \{a_0, a_1, a_2\}$, но и подобным ему специально координированным геометрическим объектом $\tilde{\Phi} = \{b_0, b_1, b_2\}$, где b_0 - радиус окружности, а b_1, b_2 - координаты её центра

$$b_0 = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 - 4a_0}\,, \quad b_1 = \frac{a_1}{2}\,, \quad b_2 = \frac{a_2}{2}\,. \qquad (1.8)$$

Назовем фигуру $F = \{\Phi\}$ лианеризируемой относительно заданного семейства реперов пространства E_n, если среди класса $\{\Phi\}$ подобных геометрических объектов, определяющих эту фигуру, существует линейный геометрический объект ([I], стр. 297).

Возникает проблема определения класса лианизируемых фигур и нахождения линейных геометрических объектов, задающих эти фигуры. Эту задачу можно расширить, заменив линейные геометрические объекты полиномиальными объектами степени выше первой ([4], стр.9).

3. Если задан геометрический объект $\Phi = \{a^J\}$ пространства E_n формулами (I.I) или вполне интегрируемой системой уравнений (I.2), то возникает проблема отыскания фигуры пространства E_n, характеризуемой геометрическим объектом Φ. В процессе инвариантного построения дифференциальной геометрии многообразия фигур того или иного типа аналитически получают различные геометрические объекты, охватываемые фундаментальными объектами, находят соответствующие им фигуры и получают геометрические интерпретации этих фигур.

4. Рассмотрим фигуру F ранга N жанра $\rho > 0$, заданную специально координированным геометрическим объектом

$$\Phi = \{a^{s_0}, a^{s_1}\} \quad (s_1, p_1, q_1 = 1, \dots, N-\rho):$$

$$\tilde{a}^{s_1} = F^{s_1}(a, u), \quad \tilde{a}^{s_0} = a^{s_0}. \qquad (1.9)$$

Обозначим буквой $\mathcal{G}''$ ρ-членную группу сдвигов ρ-мерного евклидова пространства R^ρ и буквой $\mathcal{G}'$ - прямое произведение групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}''$:

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G} \times \mathcal{G}''. \qquad (1.10)$$

Инвариантными формами группы Ли $\mathcal{G}'$ являются формы Пфаффа $\theta^S(u, du)$ и формы $\theta^{s_0} = du^{s_0}$.

Формулы

$$\tilde{a}^{s_1} = F^{s_1}(a^{p_1}, u^q), \quad \tilde{a}^{s_0} = a^{s_0} + u^{s_0} \qquad (1.11)$$

определяют транзитивное представление группы $\mathcal{G}'$ в пространстве $R(F)$ фигуры F.

Возникает проблема отыскания представления группы $\mathcal{G}'$ в исходном пространстве E_n.

Если такое представление существует, то группа $\mathcal{G}'$ называется группой преобразования пространства E_n, порожденной фигурой F (группой фигуры F). Фундаментальная группа $\mathcal{G}$ является подгруппой этой группы. Задавая в E_n различные фигуры ненулевого жанра и определяя их группы, можно получить представление различных групп на одном и том же множестве, т.е. получить различные расширения фундаментальной группы $\mathcal{G}$ пространства E_n.

Например, рассмотрим евклидову плоскость E_2 с фундаментальной группой $\mathcal{G}$ движений:

$$\tilde{x}^1 = x^1 \cos u^1 - x^2 \sin u^1 + u^2, \quad \tilde{x}^2 = x^1 \sin u^1 + x^2 \cos u^1 + u^3 \qquad (1.12)$$

В качестве фигуры F возьмем окружность радиуса τ. Группой этой фигуры является четырехмерная группа $\mathcal{G}'$

$$\tilde{x}^1 = e^{\tau}(x^1 \cos u^1 - x^2 \sin u^1) + u^2, \quad \tilde{x}^2 = e^{\tau}(x^1 \sin u^1 + x^2 \cos u^1) + u^3, \qquad (1.13)$$

изоморфная группе подобных преобразований плоскости.

Любые две окружности плоскости E_2 для представления (I.13) являются эквивалентными.

5. Классификацию фигур F пространства E_n и классификацию пар фигур можно осуществлять различными способами. В дифференциальной геометрии многообразий фигур, оказывается удобным подразделять фигуры на простые, не охватывающие

никакой другой фигуры, и индуцирующие-фигуры, охватывающие по крайней мере одну фигуру меньшего ранга ([3], стр. 186).

Для некоторых фигур такую классификацию осуществить легко. Например, точка, p-мерная плоскость, невырожденная гиперквадрика в n-мерном проективном пространстве являются простыми фигурами, а гиперквадрика в n-мерном аффинном пространстве и квадратичный элемент в n-мерном проективном пространстве являются индуцирующими фигурами (они индуцируют, соответственно, точку и гиперплоскость).

Однако, в общем случае еще не установлены аналитические критерии, позволяющие определить является ли данная фигура F простой или индуцирующей. Задача сводится к установлению отсутствия или наличия подобъектов у геометрического объекта, определяющего фигуру F.

Пары фигур классифицируются не только на простые и индуцирующие, но и на неинцидентные и инцидентные (см. [3], стр. I87-I88).

§2. Многообразия коник и квадрик.

Одним из основных разделов дифференциальной геометрии многообразий фигур является геометрия многообразий квадрик и коник в трехмерных пространствах (евклидовом, аффинном и проективном), а также геометрия многообразий p-мерных квадрик ($1 \leq p \leq n-1$) в соответствующих n-мерных пространствах. К настоящему времени наиболее полно исследованы конгруэнции коник в трехмерном проективном пространстве, многообразия квадратичных элементов и многообразия гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве (см. [5], стр. 114-126).

При исследовании многообразий коник и квадрик основное внимание обращалось на выделение фокальных образов, построение ассоциированных многообразий (главным образом алгебраических), построение инвариантного оснащения и рассмотрение различных классов многообразий коник и квадрик со специальными свойствами фокальных и других ассоциированных образов.

Рассмотрим некоторые проблемы, относящиеся к геометрии многообразий коник и квадрик в проективном пространстве.

I. Осуществить инвариантное построение дифференциальной геометрии m-мерного многообразия p-мерных невырожденных квадрик в n-мерном проективном пространстве

$$\left(1 \le m < C^2_{p+3} + (p+2)(n-p-1) - 1,\ \ 1 \le p < n\right).$$

1/ В [6] рассмотрены m-мерные многообразия невырожденных гиперквадрик

$$F_0 \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad \det \| a_{\alpha\beta} \| \ne 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n+1) \qquad (2.1)$$

в n-мерном проективном пространстве-многообразия $K(m,n)$.
Они задаются пфаффовой системой уравнений

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i} \tau^i \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \qquad (2.2)$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma} \omega^\gamma_\beta, \qquad (2.3)$$

ω^β_α – компоненты инфинитезимальных перемещений репера, τ^i – инвариантные формы параметрической группы [7]. При продолжении системы (2.3) возникает последовательность фундаментальных объектов многообразия $K(m,n)$:

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i}\}, \ \Gamma_2 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i}, \Lambda_{\alpha\beta ij}\}, \dots,$$
$$\Gamma_p = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta i_1}, \dots, \Lambda_{\alpha\beta i_1 \dots i_p}\}, \dots, \qquad (2.4)$$

определяющая геометрию этого многообразия.

Система алгебраических уравнений

$$F_{i_1} = 0, \ \dots, \ F_{i_1 \dots i_p} = 0, \qquad (2.5)$$

где

$$F_{i_1} = \Lambda_{\alpha\beta i_1} x^\alpha x^\beta, \dots, F_{i_1 \dots i_p} = \Lambda_{\alpha\beta i_1 \dots i_p} x^\alpha x^\beta \qquad (2.6)$$

определяет характеристическое многообразие ранга p многообразия $K(m,n)$ ([6], стр.53). Его пересечение с гиперквадрикой (2.1) дает фокальное многообразие ранга p. Возникает проблема исследования многообразий $K(m,n)$ с непустыми ассоциированными алгебраическими многообразиями ранга p, имеющими в общем случае нульмерные компоненты. Для $p=1$ такими многообразиями, в частности, являются многообразия $K(m,n)$, где $m=n-1$, $m=n$ или $\frac{m(m+3)}{2} = n-1$.
Для $m>n$, $p \geqslant 1$ и для $m<n$, $p>1$ многообразия $K(m,n)$ с непустыми ассоциированными алгебраическими многообразиями, состоящими из нульмерных компонент, еще не рассматривались.

Бесконечная последовательность алгебраических уравнений

$$F_0 = 0, \ \ F_{i_1} = 0, \ \dots, \ F_{i_1 \dots i_k} = 0 \qquad (2.7)$$

по теореме Гильберта о базисе эквивалентна конечной системе алгебраических уравнений (базисной системе).

Пусть $\tau_{m,n}$ – число независимых уравнений базисной системы многообразия $K(m,n)$. Совпадает ли это число с порядком основного объекта многообразия $K(m,n)$?.Для некоторых частных типов многообразий $K(m,n)$ такое совпадение имеет место.Однако,для произвольных многообразий $K(m,n)$ эта проблема пока не решена.

2/ В [8] дано инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий $(k,k,n)^2$ квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (k-мерных многообразий невырожденных $(n-2)$-мерных квадрик,гиперплоскости которых образуют k-параметрическое семейство). Найдена инвариантная точка вне гиперплоскости квадратичного элемента многообразия $(k,k,n)^2$ (инвариантное оснащение).Однако,геометрической интерпретации этой точки еще не найдено.

Учитывая,что с помощью инвариантного оснащения многообразия $(k,k,n)^2$ возникает связность на многообразии,нахождение геометрической интерпретации полученной инвариантной точки представляет особый интерес.

2.Осуществить инвариантное построение дифференциальной геометрии m-мерного многообразия алгебраических гиперповерхностей порядка $k>2$ в n-мерном проективном пространстве.

В [9] рассмотрены многообразия кубических гиперповерхностей (случай $k=3$).Многообразия алгебраических гиперповерхностей порядка $k>3$ не изучены.

3.Исследовать конгруэнцию кривых второго порядка (коник) в трехмерном проективном пространстве, все коники которой принадлежат одной алгебраической поверхности порядка $k>2$.

Исследованы (см.[5],стр.116) конгруэнции,все коники которых принадлежат одной квадрике (случай $k=2$).Доказано,что такие конгруэнции характеризуются неопределенностью фокальных семейств и фокальных поверхностей.Для $k>2$ задача пока не решена.

4.По заданным $m<6$ фокальным поверхностям конгруэнции коник некоторого класса найти геометрическую характеристику фокальных точек коники,описывающих остальные $6-m$ фокальных поверхностей.Выделить классы конгруэнций коник,для которых эта задача решается.К таким классам относятся,например,конгруэнции $\mathcal{D}_\varepsilon$ ([10],стр.202-204)).

5.Найти конгруэнции коник с шестью различными вырождающимися в линии фокальными поверхностями.

6.Найти конгруэнции коник,все шесть фокальных поверхностей которых являются плоскостями.

§3.Дифференциальная геометрия соответствий пространств фигур.

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является геометрия точечных соответствий проективных,аффинных и евклидовых пространств.Состояние исследований по этой тематике отражено в обзорах [11],[12].Применение современных методов дифференциально-геометрических исследований и прежде всего метода Г.Ф.Лаптева [1]дает возможность приступить к построению дифференциальной геометрии соответствий пространств,образующими элементами которых являются произвольные фигуры.

Пусть F_1 и F_2 -произвольные фигуры одинакового ранга N; $\Omega_1^{\mathcal{J}}$, $\Omega_2^{\mathcal{J}}$ ($\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 1,2,\dots,N$) -левые части уравнений стационарности этих фигур.

Система пфаффовых уравнений локального соответствия между пространствами $R(F_1)$ и $R(F_2)$ этих фигур имеет вид:

$$\Omega_1^{\mathcal{J}} = \Lambda_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}} \Omega_2^{\mathcal{K}}. \tag{3.1}$$

Продолжения системы (3.I) дают последовательность фундаментальных геометрических объектов соответствия φ:

$$\Gamma_1 = \{\Lambda_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}\}, \Gamma_2 = \{\Lambda_{\mathcal{K}_1}^{\mathcal{J}}, \Lambda_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}^{\mathcal{J}}\}, \dots, \Gamma_n = \{\Lambda_{\mathcal{K}_1}^{\mathcal{J}}, \dots, \Lambda_{\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_n}^{\mathcal{J}}\}, \dots \tag{3.2}$$

Геометрические объекты, охватываемые фундаментальным объектом Γ_n определяют всю геометрию $n^{ой}$-дифференциальной окрестности соответствия φ.

Уже первая дифференциальная окрестность соответствия оказывается, как правило, значительно богаче в случае соответствия пространств фигур, чем в случае точечных соответствий. Это объясняется существованием в пространствах фигур (в отличие от пространств E_n, A_n и P_n) особых направлений смещения произвольной фиксированной фигуры, т.е. неизотропностью пространств фигур.

Одним из основных понятий теории точечных соответствий является понятие характеристических направлений, выделяемых во 2-й дифференциальной окрестности, как направлений, вдоль которых данное соответствие соприкасается с касательным к нему коллинейным соответствием. Это понятие сохраняет свой смысл для специального класса фигур ,так называемых

P -фигур [13]. Для этого случая соответствий сохраняется также классификация по признаку специального расположения характеристических направлений.

Представляют интерес рассмотреть различные обобщения этого понятия на случай произвольных фигур. Исследовались случаи, когда F_1 является точкой проективного пространства, а F_2 -парой P -фигур (точка-гиперплоскость и точка - гиперквадрика). В этих случаях возникает понятие слабо характеристических направлений, размерность конуса которых на единицу больше размерности конуса характеристических направлений (число которых в общем случае 2^N-1) и, таким образом, имеется I-параметрическое семейство слабо характеристических направлений. Последнее понятие сохраняет смысл для произвольных пар P -фигур, а наличие инвариантных характеристических направлений связано с существованием в точечном пространстве инвариантного поля гиперплоскостей, неинцидентных точкам, в которых строится соответствие.

Существование аналога характеристических направлений для соответствий пространств произвольных фигур связано с существованием в них инвариантных однопараметрических семейств специального вида. В произвольной точке для произвольного смещения $\Omega^{\mathcal{J}} = \lambda^{\mathcal{J}} \omega$ (ω -параметрическая форма) должна существовать дифференциальная окрестность порядка K , в которой можно выделить I-параметрическое семейство простейшего вида- в некотором смысле аналог гиперинфлексионной кривой. Наименьший номер K такой дифференциальной окрестности является арифметическим инвариантом данной фигуры. Таким образом, рассматриваемая проблема сводится к существованию еще одного арифметического инварианта для произвольной фигуры (см. §I).

Другой путь исследования соответствий пространств фигур состоит в определении инвариантно возникающих связностей в этих пространствах. Однопараметрические семейства фигур одного пространства, соответствующие инвариантным геодезическим в другом пространстве будут определять геометрию изучаемого соответствия.

§4. Многообразия полуквадратичных и квадратичных пар фигур.

Основной раздел в теории многообразий пар фигур, интенсивно разрабатываемой в последние годы калининградскими и томскими геометрами [5], составляют многообразия полуквадратичных (точка, прямая-коника) и квадратичных (коника-коника) пар фигур в трехмерных пространствах (проективном, аффинном, эвклидовом) и прежде всего двумерные многообразия-конгруэнции.

Исследование многообразий полуквадратичных и квадратичных пар фигур осуществлялось в основном с использованием различных типов расслоений (см. [IO], [I4]). Условия расслоения, налагаемые на различные классы конгруэнций таких пар выделяет конгруэнции с достаточно интересными геометрическими свойствами, но при этом возникают значительные аналитические трудности, затрудняющие решение проблемы в целом.

Рассмотрим, например, расслояемую пару (C_1, C_2) конгруэнций $(C_1), (C_2)$ коник, не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей.

Пусть A_i -одна из точек пересечения коники C_j $(i,j,k = 1,2;\ i \neq j)$ с прямой ℓ, A_3 и A_4-полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2. Тогда уравнения коник C_1, C_2 и система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) конгруэнций запишутся соответственно в виде ([IO], стр. 2IO):

$$(x^3)^2 - (a_1x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{4.1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \theta_i = A_i^k\omega_k, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\ \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \ \Omega_i = b_i^k\omega_k, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где ω_α^β $(\alpha, \beta, = 1,2,3,4)$ -компоненты инфинитезимальных перемещений репера и

$$\omega_i = \omega_i^4, \ \theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}), \ \Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}. \tag{4.3'}$$

Здесь суммирование по индексам i и j не производится.

Как известно ([IO], стр. 2II), пара (C_1, C_2) называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к конгруэнции (A_3A_4) прямых, инцидентных полюсам прямой ℓ относительно C_1 и C_2. Расслояемые пары (C_1, C_2) определяются пфаффовыми уравнениями (4.3), их замыканиями и квадратичными уравнениями (6.II)

(6.13) из [10]:

$$\omega_3^1\wedge\omega_2^1=0,\qquad \omega_2^3\wedge\omega_3^1+\omega_2\wedge\omega_4^1=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega_3^1+\omega_3^2\wedge\omega_2^1-2\,\omega_3^4\wedge\omega_4^1=0,$$

$$2\,\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1+\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_2\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\Omega_1\wedge\omega_3^2+\omega_3^1\wedge\omega_1^2-2\,\omega_3^4\wedge\omega_4^2+a_1\theta_1\wedge\omega_3^1+ \tag{4.4}$$
$$+(a_1)^2\,(\omega_3^4\wedge\omega_4^1-\omega_3^2\wedge\omega_2^1)=0,$$

$$(a_1)^2\,\omega_3^2\wedge\omega_3^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1\wedge\omega_4^2=0,$$

$$\omega_3^2\wedge\omega_1^2+a_1\,\theta_1\wedge\omega_3^2+(a_1)^2\omega_3^4\wedge\omega_2=0.$$

$$\omega_4^2\wedge\omega_1^2=0,\qquad \omega_1\wedge\omega_4^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2=0,$$

$$\Omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_4^1\wedge\omega_1^2-2\,\omega_4^3\wedge\omega_3^2=0,$$

$$2\,\omega_4^2\wedge\omega_4^1+\omega_2\wedge\omega_4^2+\omega_2^3\wedge\omega_3^2-\omega_1\wedge\omega_4^1-\omega_1^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$\Omega_2\wedge\omega_4^1+\omega_4^2\wedge\omega_2^1-2\,\omega_4^3\wedge\omega_3^1+a_2\theta_2\wedge\omega_4^2+ \tag{4.5}$$
$$+(a_2)^2\,(\omega_4^3\wedge\omega_3^2-\omega_4^1\wedge\omega_1^2)=0,$$

$$(a_2)^2\,\omega_4^1\wedge\omega_4^2+\omega_2\wedge\omega_4^1+\omega_2^3\wedge\omega_3^1=0,$$

$$\omega_4^1\wedge\omega_2^1+a_2\,\theta_2\wedge\omega_4^1+(a_2)^2\,\omega_4^3\wedge\omega_1^3=0.$$

До сих пор удалось доказать теорему существования и исследовать только некоторые очень частные классы расслояемых пар (C_1,C_2). Возникает проблема доказательства теоремы существования расслояемых пар (C_1,C_2) общего вида. Решение этой проблемы сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений (4.3), (4.4), (4.5).

Аналогичная проблема возникает в теории расслояемых пар C_ℓ ([10], стр. 197-207) и в теории расслояемых пар (C_1,C_2), когда обе коники (или только одна) касаются линии ℓ пересечения коник.

Среди нерешенных проблем, относящихся к невырожденным многообразиям пар фигур, следует отметить также проблему инвариантного построения дифференциальной геометрии многообразия пар гиперквадрик n-мерного проективного пространства, многообразий пар p-мерных квадрик $(p<n-2)$, а также многообразий пар фигур порожденных k-плоскостью и p-мерной квадрикой.

Вырожденные многообразия пар p-мерных квадрик $(1\leq p\leq n-1)$ и пар фигур, порожденных k-плоскостью и p-мерной квадрикой до сих пор не рассматривались.

§5. Касательно-оснащенные многообразия фигур.

Пусть $\Omega^{\mathcal{I}}=da^{\mathcal{I}}-f^{\mathcal{I}}_s(a)\,\theta^s(u,du)$ – левые части уравнений стационарности фигуры F, заданной в однородном пространстве E_n, $\theta^s(u,du)$ – инвариантные формы фундаментальной группы этого пространства $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=1,2,\dots,N;\ s=1,\dots,r)$.

Многообразие $\mathcal{M}^*_m$ размерности m, определенное уравнениями

$$\Omega^a = \lambda^a_i \Omega^i, \tag{5.1}$$

$$dA^\alpha_\xi - A^\alpha_\eta \Omega^\eta_\xi + A^\beta_\xi A^\alpha_\eta (\Omega^\eta_\beta + \lambda^b_\beta \Omega^\eta_b) - \lambda^b_\xi (\Omega^\alpha_b + A^\alpha_\eta \Omega^\eta_b) +$$
$$+ A^\beta_\xi (\Omega^\alpha_\beta + \lambda^b_\beta \Omega^\alpha_b) - \Omega^\alpha_\xi = A^\alpha_{\xi i} \Omega^i, \tag{5.2}$$

$(\xi, \eta = 1,\ldots,k;\ \alpha,\beta = k+1,\ldots,m;\ i = 1,\ldots,m;\ a,b = m+1,\ldots,N)$,

где

$$\Omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa} = -\frac{\partial f^{\mathcal{J}}_s}{\partial a^{\varkappa}} \theta^s(u, du), \tag{5.3}$$

называется касательно оснащенным многообразием, соответствующим m-мерному многообразию $\mathfrak{M}_m$, определенному уравнениями (5.I). Уравнения (5.2) характеризуют относительную инвариантность системы форм $\theta^\alpha = A^\alpha_\xi \Omega^\xi + \Omega^\alpha$ (см. [I5]). Многообразие $\underset{(k)}{\mathfrak{M}^*_m}$ является многообразием $\mathfrak{M}_m$ с заданным на нем полем касательно оснащающего объекта $\varphi_k = \{a^{\mathcal{J}}, \lambda^a_i, A^\alpha_\xi\}$ (с заданным распределением).

Наряду с разработкой общих вопросов теории касательно оснащенных многообразий фигур и пар фигур, представляет интерес исследование касательно-оснащенных многообразий фигур специального вида. (Например, квадрик, квадратичных элементов в P_n).

К настоящему времени изучены лишь некоторые частные классы касательно оснащенных конгруэнций коник в P_3 [I6].

Л и т е р а т у р а

I. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. общ-ва ГИТТЛ, М., 1953, 2, 275-383.

2. Малаховский В.С., О многообразиях алгебраических фигур. Тр. Томского ун-та, т. I8I, 1965, 5-I4.

3. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР, М., 1969, 2, I79-206.

4. Малаховский В.С., Производные и полиномиальные геометрические объекты. Тр. Томского ун-та, т. I96, I968, 3-I4.

5. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР Алгебра. Топология. Геометрия., т. IO, I972, II3-I57.

6. Махоркин В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 3, Калининград, I973, 50-59.

7. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. "Геометрия, I963", Итоги науки ВИНИТИ АН СССР. М., I965, 5-64.

8. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Тр. Томского ун-та т. I68, 28-42, I963.

9. Махоркин В.В., Многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. Данный сб., 85-96.

IO. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур Труды геометрического семинара ВИНИТИ АН СССР, т. 3, I97I, I93-220.

II. Рыжков В.В., Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. "Геометрия, I963", Итоги науки ВИНИТИ АН СССР, М., I965, 65-I07.

12.Рыжков В.В.,Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.Итоги науки ВИНИТИ АН СССР.Алгебра.Топология.Геометрия.,М.,1971,153-169.

13.Андреев Б.А.,О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.2, Калининград,1971,28-37.

14.Ткач Г.П.,О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.3, Калининград,1973,143-152.

15.Малаховский В.С.,К геометрии касательно оснащенных подмногообразий.Известия высших учебных заведений,Математика,1972,№9(124),54-65.

16.Малаховский В.С.,Касательно оснащенные конгруэнции коник.Дифференциальная геометрия многообразий фигур,вып.4, г.Калининград,1974,68-85.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

М а х о р к и н В.В.

МНОГООБРАЗИЯ КУБИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ n-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА.(I)

Рассматриваются m-мерные многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. Вводится понятие ассоциированных алгебраических многообразий.Рассмотрено ассоциированное алгебраическое многообразие,которое состоит в общем случае из 3^n точек,принадлежащих кубической гиперповерхности,и содержит все её особые точки.Доказано,что $(n-1)$-мерное многообразие кубических гиперповерхностей n-мерного пространства индуцирует $(n-1)$-мерные многообразия гиперквадрик.

§1.Многообразия $\mathfrak{C}(m,n)$.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к реперу $R\equiv\{A_\alpha\}$ с деривационными формулами

$$\mathcal{D}A_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta\,,\quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,\dots,n)\qquad(1.1)$$

где формы ω_α^β подчинены структурным уравнениям проективной группы: