Список литературы

1. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа на плоскостной поверхности как семействе пар образующей и ее первой дифференциальной окрестности // Проблемы мат. и физ. наук. Калининград, 2001. С. 25 – 28.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Скрягина А.В.* Пучок связностей 1-го типа на плоскостной поверхности // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 12. С. 58 – 59.

A. Skriagina

SPECIAL EQUIPMENT OF PLANE SURFACE

The plane m-surface as a family M_r of couples of generator L_h and it's first differential neighborhood T_{m+hr} is considered in the projective space P_n. Composition equipment of plane surface is made (i.e. generelized normal of the 2-st genus $P_{r(h+1)-1}$: $L_h \oplus P_{r(h+1)-1}=T_{m+hr}$ and generelized Cartan's plane $P_{n-m-hr-1}$: $T_{m+hr} P_{n-m-hr-1}=P_n$). It is schown,that the equipment of the surface induces in the associated bundle the bunches of the first and second types. A geometric characteristic of their coincidence is found. Special cases generelized normalization second genus and Cartan's equipment are defined and used.

УДК 514.756.2

А.В. Столяров

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

НОРМАЛИЗОВАННОЕ КОНФОРМНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Изучаются конформные и аффинные связности, индуцируемые невырожденной нормализацией *n*-мерного собственно конформного пространства C_n.

Индексы принимают следующие значения: $\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}$; $i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}$.

1. Рассмотрим собственно конформное пространство C_n; отнесем его к подвижному полуизотропному [3] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_i, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1; 2]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}, \tag{1}$$

причем в собственно конформном пространстве C_n матрица $\|g_{\lambda\mu}\|$ является невырожденной и положительно определенной. Любую гиперсферу $P \in C_n$ можно представить в виде линейной комбинации элементов репера:

$$P = x^0 A_0 + x^i A_i + x^{n+1} A_{n+1}.$$

Группа конформных преобразований Λ пространства C_n изоморфна подгруппе группы проективных преобразований проективного пространства P_{n+1}, а именно: стационарной подгруппе гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset P_{n+1}$, на которую отображаются все точки конформного пространства C_n при перенесении Дарбу [1; 2]:

$$Q_n^2 : g_{ij}x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0;$$

эта подгруппа зависит от $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ независимых параметров.

При бесконечно малом преобразовании конформной группы Λ (стационарной подгруппы абсолюта $Q_n^2 \subset P_{n+1}$) элементы конформного репера R (проективного репера R) получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ (соответственно dA_λ), являющиеся гиперсферами (точками); эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера R (R) следующим образом:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu \text{ (соответственно } dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu), \tag{2}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ зависят от параметров группы Λ (стационарной подгруппы абсолюта Q_n^2). Условием полной интегрируемости системы уравнений (2) являются структурные уравнения:

$$D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu. \tag{3}$$

Кроме того, в силу соотношений (1), (2) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [1; 2]:

$$\begin{array}{ll} \omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \ \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0; & \text{(а)} \\ \omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0, \ \omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0; & \text{(б)} \\ dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0. & \text{(в)} \end{array} \tag{4}$$

Отметим, что метрический тензор g_{ij} собственно конформного пространства C_n невырожден:

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, \ g \overset{def}{=} |g_{ij}| > 0, \ d\ln\sqrt{g} = \omega_k^k. \tag{5}$$

2. Пространство C_n называется нормализованным [7; 8], если в нем задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$ (A_0 – нормализуемая точка, X_{n+1} – нормализующая точка пространства C_n). Нормализация пространства C_n равносильна тому, что к каждой точке $A_0 \in C_n$ присоединены n гиперсфер

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \tag{6}$$

проходящих через точки A_0 и X_{n+1}. Если X_{n+1} – точка конформного пространства C_n, отличная от A_0 и не лежащая на изотропном конусе $g_{ij}x^i x^j = 0$ с вершиной в точке A_0, то в силу $(P_i X_{n+1}) = 0$ и $X_{n+1} \subset Q_n^2$ она имеет разложение

$$X_{n+1} = -\tfrac{1}{2} g^{ij} x_i^0 x_j^0 A_0 - g^{ij} x_i^0 A_j + A_{n+1},$$

где

$$\nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{ik}^0 \omega_0^k. \tag{7}$$

Таким образом, нормализация пространства C_n эквивалентна заданию поля квазитензора x_i^0 [см. уравнение (7)]. Предполагая, что пространство C_n нормализовано, продолжим уравнения (7). Находим, что

$$\nabla_\delta x_{ij}^0 + x_{ij}^0 \pi_0^0 + x_{(i}^0 \pi_{j)}^0 - g_{ij} g^{st} x_s^0 \pi_t^0 = 0.$$

В силу последних уравнений и уравнений (4 в), (7) система функций

$$a_{ij}^0 \overset{def}{=} x_{ij}^0 - x_i^0 x_j^0 + \tfrac{1}{2} g_{ij} g^{st} x_s^0 x_t^0 \tag{8}$$

образует тензор (вообще говоря, несимметричный):

$$\nabla a_{ij}^0 + a_{ij}^0 \omega_0^0 = a_{ijk}^0 \omega_0^k. \tag{9}$$

Тензор a_{ij}^0 назовем основным тензором нормализации пространства C_n полем квазитензора x_i^0. В случае симметрии основного тензора a_{ij}^0 нормализацию конформного пространства C_n по аналогии с нормализацией проективного пространства [8] назовем гармонической.

Продолжая уравнения (9), имеем

$$\nabla_\delta a_{ijk}^0 + 2a_{ijk}^0 \pi_0^0 + 2a_{ij}^0 \pi_k^0 + a_{ik}^0 \pi_j^0 + a_{kj}^0 \pi_i^0 - (g_{ik} a_{sj}^0 + g_{jk} a_{is}^0) g^{st} \pi_t^0 = 0. \tag{10}$$

Возьмем охват:

$$A_{ijk}^0 \overset{def}{=} a_{ijk}^0 - a_{ik}^0 x_j^0 - a_{kj}^0 x_i^0 - 2a_{ij}^0 x_k^0 + \left(g_{ik} a_{sj}^0 + g_{jk} a_{is}^0\right) g^{st} x_t^0; \tag{11}$$

в силу уравнений (4 в), (7), (9), (10) система функций (11) образует тензор:

$$\nabla A_{ijk}^0 + 2A_{ijk}^0 \omega_0^0 = A_{ijks}^0 \omega_0^s. \tag{12}$$

Предположим, что основной тензор a_{ij}^0 невырожден:

$$a_{ik}^0 a_0^{kj} = a_{ki}^0 a_0^{jk} = \delta_i^j, \quad \nabla a_0^{ij} - a_0^{ij} \omega_0^0 = -a_0^{is} a_0^{tj} a_{stk}^0 \omega_0^k; \tag{13}$$

в этом случае будем говорить, что нормализация пространства C_n является невырожденной.

3. Возьмем новую систему из $(n + 2)^2$ форм

$$\Omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\mu + \Pi_{\lambda k}^\mu \omega_0^k; \tag{14}$$

потребуем, чтобы система форм $\{\Omega_\lambda^\mu\}$ удовлетворяла структурным уравнениям пространства конформной связности $C_{n,n}$ [4 – 6]:

$$D\Omega_\lambda^\mu = \Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega_\rho^\mu + \tfrac{1}{2} R_{\lambda st}^\mu \omega_0^s \wedge \omega_0^t.$$

Это требование накладывает следующие дифференциальные уравнения на функции $\Pi_{\lambda k}^\mu$:

$$d\Pi_{\lambda k}^\mu + \Pi_{\lambda k}^\mu \omega_0^0 - \Pi_{\lambda s}^\mu \omega_k^s - \Pi_{\rho k}^\mu \omega_\lambda^\rho + \Pi_{\lambda k}^\rho \omega_\rho^\mu + \Pi_{\lambda s}^\rho \Pi_{\rho k}^\mu \omega_0^s = \tilde{\Pi}_{\lambda ks}^\mu \omega_0^s; \tag{15}$$

при этом тензор кривизны-кручения пространства $C_{n,n}$ имеет строение:

$$R_{\lambda st}^\mu = -2\tilde{\Pi}_{\lambda[st]}^\mu. \tag{16}$$

На формы системы $\{\Omega_\lambda^\mu\}$ наложим дополнительные условия, а именно: чтобы при преобразованиях (14): 1) формы $\Omega_0^k, \Omega_0^0, \Omega_{n+1}^{n+1}$ оставались без изменения: $\Omega_0^k = \omega_0^k$, $\Omega_0^0 = \omega_0^0$, $\Omega_{n+1}^{n+1} = \omega_{n+1}^{n+1}$; 2) для пространства $C_{n,n}$ метрическим тензором был метрический тензор g_{ij} исходного пространства C_n; 3) формы Ω_λ^μ удовлетворяли соотношениям вида (4).

Эти требования эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\Pi_{0k}^{n+1} = \Pi_{0k}^s = \Pi_{0k}^0 = \Pi_{ks}^{n+1} = \Pi_{n+1k}^{n+1} = \Pi_{n+1k}^0 = 0, && (а) \\ &g^{ik}\Pi_{ks}^j + g^{jk}\Pi_{ks}^i = 0, && (б) \\ &g^{ik}\Pi_{ks}^0 + \Pi_{n+1s}^i = 0. && (в) \end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что требование одновременного выполнения соотношений (17) носит инвариантный характер.

В силу уравнений (15) и равенств (17 а) имеем:

$$\begin{aligned} &\nabla\Pi_{ik}^j + \Pi_{ik}^j\omega_0^0 = \Pi_{iks}^j\omega_0^s, && (а) \\ &\nabla\Pi_{ik}^0 + \Pi_{ik}^0\omega_0^0 + \Pi_{ik}^t\omega_t^0 = \Pi_{iks}^0\omega_0^s,\ \nabla\Pi_{n+1k}^j + \Pi_{n+1k}^j\omega_0^0 + \Pi_{tk}^j g^{tl}\omega_l^0 = \Pi_{n+1ks}^j\omega_0^s, && (б) \end{aligned} \tag{18}$$

здесь:

$$\begin{gathered} \Pi_{iks}^j = \tilde{\Pi}_{iks}^j - \Pi_{n+1k}^j g_{is} - \Pi_{ik}^0\delta_s^j - \Pi_{is}^t\Pi_{tk}^j,\ \Pi_{iks}^0 = \tilde{\Pi}_{iks}^0 - \Pi_{is}^t\Pi_{tk}^0, \\ \Pi_{n+1ks}^j = \tilde{\Pi}_{n+1ks}^j - \Pi_{n+1s}^t\Pi_{tk}^j. \end{gathered} \tag{19}$$

Задание поля тензора Π_{ik}^j, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям (18 а) и конечным соотношениям (17 б), позволит найти функции Π_{ik}^0, Π_{n+1k}^j, ибо:

1) в силу уравнений (7), (18 б) в качестве функций Π_{ik}^0 можно принять

$$\Pi_{ik}^0 = \Pi_{ik}^t x_t^0; \tag{20}$$

2) в силу соотношений (17 б, в), (20) в качестве функций Π_{n+1k}^j следует взять

$$\Pi_{n+1k}^j = -g^{js}\Pi_{sk}^t x_t^0 = g^{ts}\Pi_{sk}^j x_t^0. \tag{21}$$

При этом компоненты тензора кривизны-кручения пространства $C_{n,n}$ имеют вид:

$$R^j_{0st} = -2\Pi^j_{[st]},\ R^0_{0st} = -R^{n+1}_{n+1st} = x^0_l R^l_{0st},\ R^{n+1}_{0st} = R^0_{n+1st} = 0,\ R^{n+1}_{ist} = 2\Pi^l_{i[s}g_{t]l};\quad (22.1)$$

$$R^j_{iks} = -2\left[\Pi^j_{i[ks]} + \left(\Pi^t_{i[k}\delta^j_{s]} - g^{jl}\Pi^t_{l[k}g_{s]i}\right)x^0_t + \Pi^j_{t[k}\Pi^t_{|i|s]}\right];\quad (22.2)$$

$$R^0_{iks} = R^t_{iks}x^0_t - 2\left(\Pi^t_{i[k}a^0_{|t|s]} + g^{jl}\Pi^t_{l[k}g_{s]i}x^0_t x^0_j\right) + \tfrac{1}{2}R^{n+1}_{iks}g^{lt}x^0_l x^0_t,\ R^j_{n+1ks} = -g^{jt}R^0_{tks}.\quad (22.3)$$

4. Приведем один из возможных охватов тензора Π^j_{ik}, предполагая, что задана невырожденная нормализация конформного пространства C_n. Возьмем охват:

$$A^j_{ik} \overset{def}{=} a_0^{js}A^0_{sik} - g^{jt}g_{li}a_0^{ls}A^0_{stk},\ \ \nabla A^j_{ik} + A^j_{ik}\omega^0_0 = A^j_{iks}\omega^s_0.\quad (23)$$

В силу (23) соотношения (17 б) и (18 а) будут удовлетворены, если в качестве Π^j_{ik} взять тензор $A^j_{ik} : \Pi^j_{ik} = A^j_{ik};$ при этом соответствующие формы Ω^μ_λ связности обозначим через $\overset{1}{\omega}{}^\mu_\lambda$, а само пространство конформной связности – через $\overset{1}{C}_{n,n}$:

$$\overset{1}{\omega}{}^i_0 = \omega^i_0, \overset{1}{\omega}{}^0_0 = \omega^0_0,\ \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_{n+1} = \omega^{n+1}_{n+1},\ \overset{1}{\omega}{}^0_0 + \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_{n+1} = 0,\ \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_i = \omega^{n+1}_i,\ \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_0 = \overset{1}{\omega}{}^0_{n+1} = 0,$$

$$\overset{1}{\omega}{}^0_i + g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_{n+1} = 0,\ \ \overset{1}{\omega}{}^{n+1}_i + g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_0 = 0,\quad (24)$$

$$\overset{1}{\omega}{}^j_i = \omega^j_i + A^j_{ik}\omega^k,\ \ \overset{1}{\omega}{}^0_i = \omega^0_i + A^t_{ik}x^0_t\omega^k_0,\ \ \overset{1}{\omega}{}^j_{n+1} = \omega^j_{n+1} - g^{js}A^t_{sk}x^0_t\omega^k_0,$$

$$dg_{ij} - g_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_j - g_{kj}\overset{1}{\omega}{}^k_i = 0.$$

Теорема 1. *Невырожденная нормализация собственно конформного пространства C_n индуцирует пространство конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$, метрический тензор которого совпадает с метрическим тензором g_{ij} исходного пространства C_n, формами связности его являются формы $\overset{1}{\omega}{}^\mu_\lambda$ [см. (24)]; тензор кривизны-кручения $\overset{1}{R}{}^\mu_{\lambda st}$ пространства $\overset{1}{C}_{n,n}$ имеет строение (22.1 – 22.3), где $\Pi^j_{ik} = A^j_{ik}$, $\Pi^j_{iks} = A^j_{iks}$ [см. (23)].*

5. Уравнения (7) с использованием соотношений (24) можно записать в виде:

$$dx^0_i + x^0_i\overset{1}{\omega}{}^0_0 - x^0_k\overset{1}{\omega}{}^k_i + \overset{1}{\omega}{}^0_i = x^0_{ik}\overset{1}{\omega}{}^k_0.\quad (25)$$

Следовательно, поле квазитензора x^0_i, определяющее нормализацию исходного конформного пространства C_n, задает нормализацию и индуцированного пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$; при этом поля основных тензоров a^0_{ij} [см. (8)] и $\overset{1}{a}{}^0_{ij}$ нормализованных пространств C_n и $\overset{1}{C}_{n,n}$ совпадают: $a^0_{ij} \equiv \overset{1}{a}{}^0_{ij}$.

Возьмем две системы форм $\{\theta_0^j, \theta_i^j\}, \{\overset{1}{\theta}{}_0^j, \overset{1}{\theta}{}_i^j\}$:

$$\theta_0^j = \omega_0^j,\ \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j\left(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k\right) + g^{js}x_s^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j; \tag{26}$$

$$\overset{1}{\theta}{}_0^j = \overset{1}{\omega}{}_0^j,\ \overset{1}{\theta}{}_i^j = \overset{1}{\omega}{}_i^j - \delta_i^j\left(\overset{1}{\omega}{}_0^0 - x_k^0\overset{1}{\omega}{}_0^k\right) + g^{js}x_s^0\overset{1}{\omega}{}_i^{n+1} + x_i^0\overset{1}{\omega}{}_0^j. \tag{27}$$

Каждая из этих систем удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [4; 6], а следовательно, определяет пространство аффинной связности соответственно $A_{n,n}$ и $\overset{1}{A}_{n,n}$; пространство $A_{n,n}$ имеет нулевое кручение, а кручение $\overset{1}{r}{}_{0st}^j$ пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ совпадает с кручением $\overset{1}{R}{}_{0st}^j$ пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$ [см. (22.1)]: $\overset{1}{r}{}_{0st}^j \equiv \overset{1}{R}{}_{0st}^j = -2A_{[st]}^j$.

Уравнения тензора g_{ij} [см. (4 в), (24)] с использованием выражений (26), (27) запишутся в виде:

$$dg_{ij} - g_{ik}\theta_j^k - g_{kj}\theta_i^k = g_{ij}\theta,\ dg_{ij} - g_{ik}\overset{1}{\theta}{}_j^k - g_{kj}\overset{1}{\theta}{}_i^k = g_{ij}\theta,\ \theta = 2\left(\omega_0^0 - x_k^0\omega_0^k\right).$$

Последние уравнения говорят о том, что связности $\nabla, \overset{1}{\nabla}$ пространств $A_{n,n}$ и $\overset{1}{A}_{n,n}$ являются вейлевыми [8] с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой θ; отметим, что вейлева связность $\overset{1}{\nabla}$ в отличие от ∇, вообще говоря, является с кручением. Следует также заметить, что связность ∇ пространства $A_{n,n}$ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства C_n является гармонической, т.е. $a_{[ij]}^0 = 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Невырожденная нормализация собственно конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0 индуцирует нормализацию пространства конформной связности $\overset{1}{C}_{n,n}$, при этом поля основных тензоров a_{ij}^0 и $\overset{1}{a}{}_{ij}^0$ этих пространств совпадают; аффинные связности ∇ и $\overset{1}{\nabla}$, индуцируемые при этой нормализации, являются вейлевыми с полем метрического тензора g_{ij}, причем связность ∇ - без кручения, тензор кручения связности $\overset{1}{\nabla}$ совпадает с тензором кручения пространства $\overset{1}{C}_{n,n}$ и, вообще говоря, является ненулевым. Связность ∇ риманова тогда и только тогда, когда нормализация пространства C_n является гармонической.*

6. Если $a \overset{def}{=} \left|a^0_{ij}\right|$, то $d\ln\left(\dfrac{a}{g}\right) + 2n\omega^0_0 = a_k\omega^k_0$, $a_k = a^{ts}_0 a^0_{stk}$; продолжая последнее уравнение, находим $da_i + a_i\omega^0_0 - a_k\omega^k_i + 2n\omega^0_i = a_{ik}\omega^k_0$, $a_{[ik]} = 0$. Из этих уравнений очевидно, что поле квазитензора $\dfrac{a_i}{2n}$ определяет нормализацию конформного пространства C_n; эта нормализация индуцирована первоначальной нормализацией пространства C_n, т.е. нормализацией полем квазитензора x^0_i. В случае нормализации конформного пространства C_n полем квазитензора $\dfrac{a_i}{2n}$ в качестве основного тензора A^0_{ij} вместо a^0_{ij} [см. (8)] теперь берется

$$A^0_{ij} \overset{def}{=} \frac{1}{2n}\left(a_{ij} - \frac{a_i a_j}{2n} + \frac{1}{4n} g_{ij} g^{st} a_s a_t\right); \tag{28}$$

при этом нормализация пространства с полем основного тензора A^0_{ij} является гармонической: $A^0_{[ij]} = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Невырожденная нормализация (необязательно гармоническая) собственно конформного пространства C_n полем квазитензора x^0_i индуцирует гармоническую нормализацию исходного пространства полем квазитензора $\dfrac{a_i}{2n}$, основной тензор которой имеет строение (28).*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Мат. сб. 1961. Т.53. № 1. С. 53 – 72.

2. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

3. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань, 1972.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.,П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

5. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

6. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275 – 382.

7. *Норден А.П.* Конформная интерпретация пространства Вейля // Мат. сб. 1949. Т. 24. № 1. С. 75 – 85.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

A. Stolyarov

NORMALIZED CONFORMAL SPACES

In the work the conformal and affine connections, induced by the non-degenerated normalization of a *n*-dimensional conformal proper space C_n, are investigated.