Исследуя системы

$$\begin{cases} Q_1 = 2(a^2-1)x^1(x^1-1)+2+2aA_1(2x^1-(x^1)^2)=0, \\ Q_2 = 2x^1-(x^1)^2=0; \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} Q = (x^1)^2-2x^1+a^2[(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3+2x^1x^3]=0, \\ Q_1 = 2(a^2-1)x^1(x^1-1)+2+2aA_1(2x^1-(x^1)^2)=0, \\ Q_2 = 2x^1-(x^1)^2=0, \end{cases}$$

приходим к следующему результату: характеристическое и фокальное многообразия конгруэнции квадрик Q [4] определены лишь при $a^2=\frac{1}{2}$. Характеристическим многообразием является плоскость $x^1=2$, а фокальным – коника: $(x^2)^2+(x^3)^2+2x^3=0$, $x^1=2$ в этой плоскости.

При $a^2=\frac{1}{2}$ фокальные точки эллипса C_2 определяются из системы

$$\begin{cases} x^2[(x^2)^2-3x^1+2+(x^1)^2]=0, \\ 2(x^1)^2-4x^1+(x^2)^2=0, \end{cases}$$

и тогда точка $A_2(2,0,0)$ является строенной фокальной точкой эллипса C_2.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр. / Калинингр. ун-т.Калининград,1973.Вып.3.С.41-49.

2. Ф у н т и к о в а Т.П. Об одном классе вырожденных конгруэнций,порожденных парой эллипсов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград.1979.Вып.16.С.87-90.

3. Ш и р о к о в П.А., Ш и р о к о в А.П. Аффинная дифференциальная геометрия.М.1959.

4. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М. 1974.Т.6. С.113-136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Б.Ф у р м а н о в
(МГПИ им.В.И.Ленина)

Рассмотрены эквиобъемные и псевдоконформные отображения областей евклидовых пространств и изучены некоторые свойства таких отображений.

1.Мы находимся в условиях,описанных В.Т.Базылевым в работе [1]. Пусть f – гладкое обратимое отображение области $\Omega\subset E_n$ в область $\overline{\Omega}\subset\overline{E}_n$, где $E_n\oplus\overline{E}_n=E_{2n}$. Если $x_1\in\Omega$, $f(x_1)=x_2$ и $\vec{Ox}=\vec{Ox_1}+\vec{Ox_2}$, то точка $x\in V_n$, где V_n – график отображения f.

Из построения графика отображения возникают два (присоединенных) отображения $g:\Omega\to V_n$ и $h:\overline{\Omega}\to V_n$, таких, что $g(x_1)=x$ и $h(x_2)=x$. Эквиобъемность отображения f означает, что

$$c\cdot\sqrt{\det G}=\sqrt{\det\overline{G}}, \quad c=\mathrm{const},$$

где $G=\|\gamma_{ij}\|$, $\overline{G}=\|\overline{\gamma}_{ij}\|$, а γ_{ij}, $\overline{\gamma}_{ij}$ – метрические тензоры областей Ω и $\overline{\Omega}$.

Так как базис $\vec{e}_i$ состоит из ортонормированных векторов, расположенных на касательных к линиям ω^i основания отображения в точке x, то имеем: $\det G=\prod\gamma_{ii}=1$, $\det\overline{G}=\prod\overline{\gamma}_{ii}$. Следовательно, условие эквиобъемности отображения f принимает вид:

$$c=\prod\sqrt{\overline{\gamma}_{ii}}. \qquad (1)$$

Л е м м а. Отображение f эквиобъемно $\Leftrightarrow\sum\overline{\omega}^i_i=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f эквиобъемно, тогда из $\overline{\gamma}_{ii}=\vec{e}_{n+i}\cdot\vec{e}_{n+i}$ имеем $d\ln\overline{\gamma}_{ii}=2\overline{\omega}^i_i$. Учитывая равенство (1), получим $\sum\overline{\omega}^i_i=0$. Пусть $\sum\overline{\omega}^i_i=0$. Находим $0=\sum 2\overline{\omega}^i_i=d\sum\ln\overline{\gamma}_{ii}=d\ln\prod\overline{\gamma}_{ii}$. Следовательно, $\ln\prod\overline{\gamma}_{ii}=c_1$. Поэтому $\prod\overline{\gamma}_{ii}=e^{c_1}=c=c\sqrt{\prod\gamma_{ii}}$ и эквиобъемность отображения f доказана.

С л е д с т в и е. Отображение $g:\Omega\to V_n$ эквиобъемно $\Leftrightarrow\sum\theta^i_i=0$.

Т е о р е м а I (Критерий эквиобъемности отображения f). Пусть отображение f отнесено к основанию отображения и векторы e_i находятся на касательных к линиям ω^i этого основания. Отображение f будет эквиобъемным тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\sum g_{ii}\cdot(\bar{\gamma}_{ii})^{-1}\cdot b_{ij}^{n+i}=0, \quad \text{для } \forall j=1,2,\dots,n, \tag{2}$$

где $g_{ii}=\vec{\varepsilon}_i\cdot\vec{\varepsilon}_i=\gamma_{ii}+\bar{\gamma}_{ii}=1+\bar{\gamma}_{ii}$, b_{ij}^{n+k} -система вторых тензоров поверхности V_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (59) работы [1] имеем равенство $\bar{\omega}_i^i=\omega_i^i-(1+\bar{\gamma}_{ii})\cdot(\bar{\gamma}_{ii})^{-1}\cdot\theta_i^{n+i}$, верное для любого отображения. Из леммы эквиобъемность f эквивалентна равенству: $\sum\bar{\omega}_i^i=0$. Следовательно, $\sum\omega_i^i-\sum(1+\bar{\gamma}_{ii})\cdot(\bar{\gamma}_{ii})^{-1}\cdot\theta_i^{n+i}=0$. Но $\omega_i^i=0$ (так как репер R^{x_1} ортонормированный). Поэтому $\sum g_{ii}\cdot(\bar{\gamma}_{ii})^{-1}\cdot\theta_i^{n+i}=0$. В репере R^x: $\theta_i^{n+i}=b_{ij}^{n+i}\cdot\theta^j$. Отсюда $\sum g_{ii}\cdot(\bar{\gamma}_{ii})^{-1}\cdot b_{ij}^{n+i}\cdot\theta^j=0$. Учитывая линейную независимость форм θ^j, получаем (2).

С л е д с т в и е. Отображение f эквиобъемно $\Leftrightarrow B\cdot H=0$, где матрица $H=(h_1,\dots,h_n)'$, $h_i=g_{ii}/\bar{\gamma}_{ii}$, а j-строка матрицы B имеет вид $(b_{1j}^{n+1}, b_{2j}^{n+2},\dots,b_{nj}^{n+n})$.

З а м е ч а н и е. В теореме 3 мы увидим, что $h_i=\sqrt{|\vec{\varepsilon}_{n+i}|}$.

2. Отображение f называется псевдоконформным индекса k, если оно конформно вдоль распределения Δ_k, натянутого на k полей векторов, касательных к линиям основания σ_k отображения. Это значит, что в каждой точке $x\in\Omega$ эллипсоид деформации имеет k равных главных полуосей [2].

Т е о р е м а 2. Отображение f псевдоконформно (индекса k) $\Leftrightarrow$ отображение h псевдоконформно (индекса k).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать $k=2$. Пусть f псевдоконформно, т.е. $\bar{\gamma}_{11}=\bar{\gamma}_{22}$, и поэтому $1+\bar{\gamma}_{11}=1+\bar{\gamma}_{22}$. Тогда $g_{11}/\bar{\gamma}_{11}=g_{22}/\bar{\gamma}_{22}$, что и означает псевдоконформность отображения h. Пусть h псевдоконформно. Тогда $h_1=h_2$. Отсюда $(1+\bar{\gamma}_{11})/\bar{\gamma}_{11}=(1+\bar{\gamma}_{22})/\bar{\gamma}_{22}$. Следовательно, $\bar{\gamma}_{11}=\bar{\gamma}_{22}$ и псевдоконформность отображения f доказана.

3. Псевдофокусом на инвариантной нормали $(x,\vec{\varepsilon}_{n+k})$ к поверхности V_n называется такая точка F_{n+k}^j с радиус-вектором $\vec{F}_{n+k}^j$ на этой прямой, которая при смещении точки с радиус-вектором $\vec{x}$ по линии θ^j сети Σ_n^* имеет дифференциал $d\vec{F}_{n+k}^j$ с нулевой координатой по вектору $\vec{\varepsilon}_j$ базиса $(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n,\vec{\varepsilon}_{n+1},\dots,\vec{\varepsilon}_{2n})$.

Из $\vec{F}_{n+k}^j=\vec{x}+\lambda\cdot\vec{\varepsilon}_{n+k}$ находим $d\vec{F}_{n+k}^j=d\vec{x}+d\lambda\cdot\vec{\varepsilon}_{n+k}+\lambda(\theta_{n+k}^\ell\cdot\vec{\varepsilon}_\ell+\theta_{n+k}^{n+\ell}\cdot\vec{\varepsilon}_{n+\ell})$. По условию $d\vec{x}=\theta^i\vec{\varepsilon}_i$, причем все $\theta^i=0$, кроме $\theta^j\neq 0$, $j\neq i$. Из определения псевдофокуса следует

$$\omega^j+\lambda\,\theta_{n+k}^j=0. \tag{3}$$

Для репера R^x имеем

$$\theta_{n+k}^j=-(\bar{\gamma}_{jj})^{-1}\cdot\theta_j^{n+k}.$$

Но $\theta_j^{n+k}=b_{ji}^{n+k}\cdot\theta^i$. Отсюда находим, учитывая, что $\theta^i=0$, при $i\neq j$:

$$\theta_{n+k}^j=-(b_{jj}^{n+k}/\bar{\gamma}_{jj})\cdot\theta^j.$$

Подставляя найденные θ_{n+k}^j в формулу (3), получим

$$\theta^j-\lambda\cdot(b_{jj}^{n+k}/\bar{\gamma}_{jj})\cdot\theta^j=0,$$

j -фиксировано.

Итак, псевдофокус F_{n+k}^j на инвариантной нормали $(x,\vec{\varepsilon}_{n+k})$ определяется радиус-вектором

$$\vec{F}_{n+k}^j=\vec{x}+(\bar{\gamma}_{jj}/b_{jj}^{n+k})\cdot\vec{\varepsilon}_{n+k},$$

если $b_{jj}^{n+k}\neq 0$. Если же $b_{jj}^{n+k}=0$, то в этом случае говорят, что псевдофокус F_{n+k}^j уходит в бесконечность.

4. Псевдофокусом на касательной $(x,\vec{\varepsilon}_k)$ к поверхности V_n называется такая точка F_k^j на этой прямой, определяемая радиус-вектором $\vec{F}_k^j$, которая при смещении точки $\vec{x}$ по линии θ^j $(j\neq k)$ сети Σ_n^* имеет дифференциал $d\vec{F}_k^j$ с нулевой координатой по вектору $\vec{\varepsilon}_j$.

Пусть $\vec{F}_k^j=\vec{x}+\lambda\cdot\vec{\varepsilon}_k$. Тогда

$$d\vec{F}_k^j=d\vec{x}+d\lambda\cdot\vec{\varepsilon}_k+\lambda(\theta_k^i\cdot\vec{\varepsilon}_i+\theta_k^{n+i}\cdot\vec{\varepsilon}_{n+i}).$$

Но $d\vec{x}=\theta^j\cdot\vec{\varepsilon}_j$ (j фиксировано, $\theta^i=0$ при $i\neq j$). Поэтому $\theta^j+\lambda\cdot\theta_k^j=0$. Но так как формы θ_k^j -главные (сеть Σ_n^* фиксирована), $\theta_k^j=t_{k\ell}^j\cdot\theta^\ell$. Учитывая, что все $\theta^\ell=0$, кроме θ^j, получим: $\theta^j+\lambda\cdot t_{kj}^j\cdot\theta^j=0$ (j -фиксировано).

Итак, псевдофокус F_k^j на касательной $(x,\vec{\varepsilon}_k)$ $(j\neq k)$ определяется радиус-вектором $\vec{F}_k^j=\vec{x}-(t_{kj}^j)^{-1}\cdot\vec{\varepsilon}_j$ (j и k фиксированы, $j\neq k$) при условии, что $t_{kj}^j\neq 0$.

При $t^j_{kj} = 0$ говорят, что псевдофокус F^j_k уходит в бесконечность.

5. Имеем $\vec{\varepsilon}_{n+j} = \vec{e}_j - \gamma_{jk}\cdot\bar{\gamma}^{kt}\cdot\vec{e}_{n+t}$, отсюда $\bar{g}_{jj} = \gamma_{jj} + \gamma_{jk}\cdot\gamma_{js}\cdot\bar{\gamma}^{ks}$. С другой стороны, $\bar{g}_{jj} = |\vec{\varepsilon}_{n+j}|^2$. Если $\Sigma^*_n = \sigma^*_n$ – основание отображения, то $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$. Тогда

$$\bar{g}_{jj} = 1 + (\bar{\gamma}_{jj})^{-1}. \tag{4}$$

Пусть отображение f псевдоконформно индекса k. Тогда $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = \ldots = \bar{\gamma}_{kk}$, и из (4) получаем, что $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = \ldots = \bar{g}_{kk}$, т.е. $|\vec{\varepsilon}_{n+1}| = |\vec{\varepsilon}_{n+2}| = \ldots = |\vec{\varepsilon}_{n+k}|$.
Верно и обратное. Следовательно, доказана

Т е о р е м а 3. Отображение f псевдоконформно индекса k тогда и только тогда, когда в репере R^x, построенном на касательных к линиям сети σ^*_n в точке x графика, соответствующие векторы $\vec{\varepsilon}_{n+i}$ имеют равные длины.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств // Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. Т.I. С.41-51.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Геометрия 1963 / ВИНИТИ. 1965. С.65-107.

3. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. Итоги науки. ВИНИТИ 1970. С.153-174.

4. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Вопросы дифференциальной геометрии: уч.зап. МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970. № 374. Т.I. С.28-40.

5. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых n-пространств // Тезисы докл. III Межвуз.науч. конф. по проблемам геометрии. Казань. 1967. С.8.

6. Р ы ж к о в В.В. Об отображениях евклидовых пространств, обобщающих конформные // Тр. Томского ун-та. 1965. 181. С.15-18.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 19 1988

УДК 514.75

ОБ АЛГЕБРЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

М.А. Ч е ш к о в а
(Алтайский университет)

В пространстве аффинной связности A_n задано векторное поле a^i, удовлетворяющее условию $\nabla_j\nabla_k a^i = \nabla_k\nabla_j a^i$. Рассматриваются алгебры деформации [1] $\mathfrak{U}(A_n, A)$, $\mathfrak{U}(A_n, B)$, ассоциированные с тензорными полями

$$a^i_{jk} = \nabla_k\nabla_j a^i, \quad b^i_{jk} = \tilde{a}^i_s a^s_{jk}, \quad \tilde{a}^i_s a^s_j = \delta^i_j, \quad a^i_j = \nabla_j a^i.$$

1. Рассмотрим пространство аффинной связности A_n нулевого кручения со структурными уравнениями

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k \quad (i, j, k, m = 1, \ldots, n), \\ \mathcal{D}\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k = \frac{1}{2} R^j_{ikm}\,\omega^k \wedge \omega^m. \end{cases} \tag{1}$$

Задание на A_n симметричного тензора P^i_{jk} в F-модуле дифференцируемых векторных полей на A_n определяет коммутативную алгебру [1] $\mathfrak{U}(A_n, P)$, ассоциированную с тензором P^i_{jk}:

$$z = P(x, y), \quad z^i = P^i_{jk}\, x^j y^k. \tag{2}$$

Алгебру $\mathfrak{U}(A_n, P)$ можно рассматривать как алгебру деформаций связностей $\nabla, \bar{\nabla}$, где ∇ – связность, определяемая формами ω^j_i, а $\bar{\nabla}$ – формами

$$\theta^j_i = \omega^j_i - P^j_{ik}\,\omega^k. \tag{3}$$

Структурные уравнения связности $\bar{\nabla}$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \theta^i_k, \\ \mathcal{D}\theta^j_i - \theta^k_i \wedge \theta^j_k = \frac{1}{2} \bar{R}^j_{ikm}\,\omega^k \wedge \omega^m, \end{cases} \tag{4}$$