УДК 681.5.015

А. Л. Рутковский, Г. Г. Арунянц,
М. А. Ковалева, Н. В. Тедеева

ФОРМАЛИЗАЦИЯ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ КОМПЛЕКСОМ

Приведены результаты развития математических методов и постановок задач оптимального управления множеством взаимосвязанных траекторий – технологиями непрерывных технологических процессов и создания численных методов их решения.

Results of development of mathematical methods and statement of problems of optimum control of a set of the interconnected trajectories–technologies of continuous technological processes and creations of numerical methods of their decision are given.

Ключевые слова: автоматизированные системы, математические методы, множество взаимосвязанных траекторий, оптимальное управление, финитное управление.

Key words: automated systems, mathematical methods, plurality of interconnected paths, optimal control, finite control.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016.
Сер. : Физико-математические и технические науки. № 1. С. 81 – 89.

Работа посвящена развитию и исследованию математических методов управления множества взаимосвязанных траекторий (МВТ-технологий) и применению этих методов к теории формирования и построения систем оптимального управления сложными технологическими комплексами, такими как металлургический комбинат, система «рудник — обогатительная фабрика — металлургический завод» и аналогичных технологий.

Цель статьи — развитие математических методов, постановка задач оптимального управления МВТ-технологиями непрерывных технологических процессов и создание численных методов их решения. Особенности таких задач порождают необходимость специального исследования. К таким особенностям следует, прежде всего, отнести большую размерность вектора исходных параметров и представления управляющего поля в фазовое многообразие движущейся в этом поле совокупности траекторий преобразований на множестве технологических процессов.

В математическом отношении многие из этих задач являются задачами вариационного исчисления, математической теории оптимальных процессов и численных методов оптимизации. Идеи и методы этих областей математики развиваются в настоящем исследовании применительно к упомянутым проблемам управления МВТ-технологиями.

Предмет управления МВТ-технологиями в основном составляют математические задачи управления, которые можно описать следующим образом. Будем предполагать, что в каждый момент времени состояние управляемого процесса определяется математически фазовым вектором n-мерного евклидова пространства R^n. Считаем, что динамика процесса задается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$ — n-мерная вектор-функция управления.

Предполагается, что в фазовом пространстве переменных x_1, x_2, …, x_n задано некоторое множество M_0 начальных состояний управляемых семейств траекторий, отвечающих различным начальным данным из множества M_0. Это семейство траекторий будем называть пучком множества траекторий, или простом МВТ.

Пусть $\rho_0(x)$ — плотность распределения МВТ в фазовом пространстве в начальный момент $t = 0$. Тогда, как известно из [1; 2], изменение во времени и в фазовом пространстве плотности распределения МВТ $\rho(t, x)$, динамика которых задается уравнением (1), описывается уравнением

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dx} f(t, x, u(t, x)) + \rho \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i(t, x, u(t, x))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i(x, t, u(t, x))}{\partial u_i} \frac{du_j}{dx_i} \right) = 0$$

при начальном условии $\rho(0, x) = \rho_0(x)$. Рассмотрим на МВТ функционалы вида

$$I(u) = f_0^T f_{Mt,u} \phi(t, x_t), \rho(t, x_t), u(t, x_t)) dx_t dt + f_{M_{T,u}} g(x_T, \rho(T, x_T)) dx_T, \tag{2}$$

$$I(u) = \max_{t \in TN \subset [0,\, T]} \max_{x \in M_{t,u}} \Phi(t, x, \rho(t, x)), \tag{3}$$

характеризующие качество управляемого процесса (динамику пучка МВТ). Здесь $M_{t,u}$ — образ множества M_0 в силу системы (1), т. е. множества фазовых состояний в момент t совокупности МВТ, движение которых при выбранном управлении $u(t, x)$ определяется системой (1) и множеством начальных состояний M_0. Множество $M_{t,u}$ будем называть *сечением* по t пучка траекторий, соответствующих управлению u (или *пучком* МВТ-технологий в момент t при управлении $u(t, x)$).

Функционал (2) в зависимости от функций Φ и g может иметь различный физический смысл. Так, в случае $\Phi = 0$ и $g = 1$ функционал (2) определяет объем, занимаемый МВТ в конечный момент T, и задачей исследования может быть отыскание такого управления $u\ (t, x)$, чтобы этот объем был наименьшим. Если $\Phi = 0$, а $g = \left\| x - \bar{x} \right\|^2 \rho(T, x)$, то функционал (2) характеризует среднеквадратичное отклонение пучка частиц в момент T от заданного состояния с весом $p(T, x)$, равным плотности распределения МВТ. При ненулевой функции Φ функционал (2) отражает не только конечное состояние пучка, но и текущее.

В отличие от функционалов вида (2), характеризующих динамику МВТ в среднем, функционалы типа (3) оценивают управляемый процесс по «наихудшим» траекториям, т. е. траекториям, которые доставляют в некоторые моменты времени наибольшее значение функции Φ на соответствующих сечениях пучка. Так, при $\Phi = \left\| x - \bar{x} \right\|^2$ функционал (3) определяет частицы, максимально отклонившиеся от заданного состояния x. Если же $\Phi = \left\| x - \bar{x} \right\|^2 \rho(T, x)$, то учитывается не только удаление траекторий от x, но и их плотность распределения, играющая роль весовой функции.

Задачи минимизации функционалов типа (2), (3) будем называть *задачами оптимального управления* МВТ.

При разработке автоматизированной системы оптимального управления группой аппаратов, в которых протекают сложные технологические процессы, возникает задача оптимального управления отдельным аппаратом с закрепленными концами и заданным временем протекания [3]. Следует отметить, что технологические процессы цветной металлургии описываются сложными нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями или в частных производных. В первом приближении будем рассматривать класс металлургических процессов, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями типа

$$x = F(x, u), \tag{4}$$

где x — n-мерный вектор состояния; u — r-мерный вектор управления; F — n-мерная вектор-функция, отражающая основные физико-механические особенности технологического процесса. Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом.

Необходимо найти такое допустимое управление $u \in U$, которое переводит систему (1) из некоторого начального состояния x_0 в заданное конечное состояние за заданное время T, минимизируя при этом некоторый критерий оптимальности I, который в общем виде можно записать как [3]

$$I = \int_0^T G(x, u)dt. \tag{5}$$

Хорошо известно, что при решении такой задачи оптимального управления при использовании вариационных условий, например принципа максимума Л. С. Понтрягина, возникает необходимость решения соответствующей краевой пограничной задачи. Это весьма трудная проблема, которая даже для линейных сосредоточенных систем не имела регулярных способов решения до тех пор, пока Н. Н. Красовский [3] не показал, что проблема оптимального управления линейными системами во многих случаях (но не во всех) может быть сведена к решению проблемы моментов. Аппарат теории моментов дает эффективные точные и приближенные методы вычислений оптимальных управлений, при этом решаются и краевые задачи [4].

Поставленную задачу оптимизации можно отнести к классу задач финитного управления, где аналогичным образом ставится задача о переводе системы из одного состояния в другое за конечное (финитное) время. Подход к решению поставленной выше задачи сродни прямым методам вариационного исчисления, суть которого заключается в том, что при решении вариационной задачи сначала отправляются от множества кривых, удовлетворяющих краевым условиям, а затем тем или иным способом из этого множества кривых стараются выделить ту, что дает экстремум заданному функционалу.

Это позволяет обойти основную трудность при использовании классических и неклассических вариационных методов, заключающуюся, как указывалось выше, в необходимости решения двухточечной краевой задачи.

Поскольку управление без всякой потери общности можно считать равным нулю вне заданного конечного интервала времени [0, T], то эту задачу и называют задачей финитного управления, для решения которой можно использовать мощный аналитический аппарат теории целых функций экспоненциального типа и теорию интерполяции Лагранжа [5].

Однако этот математический аппарат применим лишь к решению задач финитного управления системами, которые описываются линейными соотношениями: дискретными линейными уравнениями, обыкновенными дифференциальными уравнениями и т. д. Поэтому непосредственно использовать метод решения задач финитного управления, предложенный А. Г. Бутковским [4], нельзя.

Рассмотрим эту задачу несколько под другим углом зрения. Пусть существует некоторая траектория $g(t)$, удовлетворяющая условиям поставленной задачи, но не являющаяся оптимальной. Разобьем эту траекторию $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ на n отрезков, длительность существования которых равна $T/n = T_0$. Разложим уравнение (4) в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $g(iT_0)$, принадлежащей допустимой траектории $g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и ограничимся первыми двумя членами, т. е.

$$F(x,U) = F(x,U)\big|x = x_i,\ U = U_i + \sum\nolimits_{j-1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\ \big|x = x_i,$$
$$U = U_i(x_j - x_i) + \sum\nolimits_{k+1}^{r} \frac{\partial F}{\partial U_k}(U_k - U_k^i). \tag{5'}$$

Тогда линеаризованное уравнение движения системы (4) примет следующий вид:

$$\dot{y} = A_i y + B_i U_i, \tag{6}$$

где A_i — матрица размера $n \times n$, элементы которой составляют первые производные вектор-функции $F(x, U)$ по координатам вектора состояния x в точках $x(iT_0)$ и $U(iT_0)$; B_i — матрица размера $n \times u$, элементы которой — первые производные вектор-функции $F(x, U)$ по координатам вектора управления U в точках $x(iT_0)$ и $U(iT_0)$.

Теперь можно сформулировать задачу финитного управления для системы (6): на отрезке $(iT_0, (i+1)T_0)$ необходимо найти такое управление U, которое переводит систему (3) из некоторого начального состояния $x(iT_0)$ в точку $x((i+1)T_0)$ за время T_0.

Так как в дальнейшем необходимо использовать теорему Винера — Пэли, которая формулируется для функций, определенных на симметричном относительно начала координат отрезке, будем рассматривать систему (6) и функцию $U(t)$ на отрезке $(-\tau, \tau)$, а не $(iT_0, (i+1)T_0)$, положив $\tau = T/2$ и произведя сдвиг области определения функций на T вперед. Как известно, для преобразованных по Фурье функций это соответствует умножению их на величину $e^{-j\omega\tau}$.

Будем считать, что $U(t)$ — финитная функция, определенная на отрезке $[-m, m]$ и, по крайней мере, интегрируемая с квадратом, т. е. $U(t) \in L_2[-\tau, \tau]$. Очевидно, что координаты вектора $y(t)$ также будут интегрируемы с квадратом на отрезке $[-\tau, \tau]$.

Начальное условие для системы (6) запишем в виде

$$y(-\tau) = x((i+1)T_0 - x(iT_0)) = Y_0. \tag{7}$$

Тогда конечное условие при $t = i$ будет иметь вид

$$y(+\tau) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, получаем следующую задачу финитного управления. Необходимо найти такую финитную функцию $U(t)$, интегрируемую с квадратом, на носителе $[-\tau, \tau]$, чтобы система (6) перешла из начального состояния (7) в конечное состояние (8), т. е. в начало координат фазового пространства. Число τ будем рассматривать как заданное число.

Следуя методу, предложенному А. Г. Бутковским [4], применим преобразование Фурье к системе (6) с начальным условием (7). Получим выражение

$$j\omega\overline{y}(\omega) = y_0 e^{j\omega\tau} = A_i\overline{y}(\omega) + B_i\overline{U}(\omega),$$

решая которое относительно $\overline{y}(\omega)$, будем иметь

$$\overline{y}(\omega) = \frac{D_i(\omega)\left[B_i U(\omega) + y_0 e^{i\omega\tau}\right]}{\left|i\omega E - A_i\right|}, \tag{9}$$

где $D_i(\omega)$ — матрица, присоединенная к матрице $(j\omega E - A_i)$; E — единичная матрица; $\left|j\omega E - A_i\right|$ — определитель матрицы $(j\omega E - A_i)$.

В соответствии с теоремой Винера — Пэли [3] известно, что для того, чтобы $y(t)$ была финитной функцией, необходимо, чтобы правая часть выражения (9) могла быть продолжена на всю комплексную плоскость как целая функция, т. е. функция комплексного переменного

$$y(z) = \frac{D_i(z)[B_i U(z) + y_0 e^{iz_t}]}{\left|izE - A_i\right|} \tag{10}$$

не должна иметь особенностей для любого конечного z. Это приводит к тому, что числитель дроби (10) должен иметь те же нули и те же кратности, что и полином $\left|jzE - A_i\right|$. Пусть полином $\left|jzE - A_i\right|$ имеет корни $z_1, \ldots, z_n$. Тогда должны иметь место следующие равенства:

$$D(z_i)\left[B_i U(z_i) + y_0 e^{jz_t\tau}\right] = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Поэтому для искомой функции $U(z)$ должны выполняться следующие условия:

$$U(z) = -\frac{D(z_i)y_0 e^{iz_t\tau}}{D(z_i)B_i} = \beta_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Условия (11) удобно интерпретировать как интерполяционные. Для решения интерполяционной задачи воспользуемся формулой Лагранжа. Пусть корень z_k полинома $\left|jzE - A\right|$ имеет кратность l_k, $k = 1, \ldots, s$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{s} l_k = n.$ Тогда для того, чтобы $y(z)$ было целой функцией, необходимо и достаточно, чтобы не только числитель обращался в нуль в точке $z = z_k$, но и все его первые производные до $(l_k - 1)$ включительно. В этом случае формула Лагранжа, дающая решение интерполяционной задачи, имеет вид

$$U(z) = \sum_{k=1}^{s} \frac{\phi(z)}{(z - z_k)} \sum_{m=0}^{l_k} \frac{\beta_k^m (z - z_k)^m}{m!} \times \left[\frac{(z - z^k)^{l_k}}{\phi(z)}\right]_{z=z_k}^{(l_k - m - 1)} + \psi(z), \tag{12}$$

где $m = 0, 1, \ldots, l_k - 1$; $k = 1, 2, 3, \ldots, s$; $\psi(z)$ — произвольная целая функция. $\psi(z)$ — целая функция степени τ, обращающаяся в нуль в узлах интерполяции вместе с первыми производными до $(l_k - 1)$-й.

Для определения искомого финитного управления на носителе $(-\tau, \tau)$ остается отыскать функцию $\psi(z)$, удовлетворяющую условиям

$$1)\ \psi(z_i)=0,\ \psi'(z_i)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(l_k-1)}(z_i)=0,\ \varphi^{l_k}=0,$$

$$2)\ \frac{\varphi(\omega)}{\omega-Z_i}\in L_2(-\infty,\infty),\ i=1,\ldots,n.$$

Степень $\psi(z)$ равна τ. По теореме Вейерштрасса [3] всякую целую функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\phi(z)=z^m\exp\left[g(z)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\right]\exp\left[\frac{z}{z_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^k\right],$$

где m — кратность нулевого корня; $z_i, \ldots, z_k$ — не равные нулю простые корни. Взяв обратное преобразование Фурье от выражения (12) и выделив вещественную часть, найдем искомое управление:

$$U(t)=\mathrm{Re}\left\{F^{-1}\left[\frac{U}{\omega}\right]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}. \qquad (13)$$

А. Г. Бутковский [4] показал, что управление (13) при $\varphi(z)=0$ решает задачу оптимального управления в смысле минимума критерия:

$$I=\int_0^{T_0}U^2(t)dt.$$

Поскольку $\varphi(z)$ является произвольной целой функцией, то нет принципиальных трудностей в выборе в классе заданных функций, таких как $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих условиям (4), (5), (5′), которые будут давать минимум выбранного функционала. Полученное управление $U(t)$ является функцией координат фазового пространства:

$$\left[x((i+1)T_{\downarrow}0)-x((i)T_{\downarrow}0)\right],\ A(x((i)T_{\downarrow}0)),\ B(x((i)T_{\downarrow}0)),$$

т. е.

$$F(t)=f\left\{\left[x((i+1)T_{\downarrow}0)-x((i)T_{\downarrow}0)\right],A(x((i)T_{\downarrow}0)),B(x((i)T_{\downarrow}0))\right\},\ iT_0\leqslant t\leqslant(i+1)T_0. \qquad (14)$$

Поэтому наша вторая задача — такое определение величины (iT_0), которое обеспечило бы минимум некоторого функционала I на интервале $[0, T]$ при управлении на каждом подинтервале $[iT_0, (i+1)T_0]$ типа (14), т. е. требуется найти точки $x(iT_0)\in g^*(t),\ \ 0\ll t\ll T$. Поскольку $U(t)\in\Omega_U$, т. е. ограничено, то значения $x(iT_0)$ тоже ограничены.

Для решения этой задачи разобьем интеграл (5) на сумму n интегралов:

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{iT_0}^{(i+1)T_0}G(x,U)dt,\ i=0,1,\ldots,n-1. \qquad (15)$$

Каждое слагаемое в выражении (15) при известном управлении $U(t)$ зависит только от значений $x(iT_0)$ и $x((i+1)T_0)$.

Таким образом, функционал I является функцией от значений $\{x(0), x(1T_0), x(2T_0), \ldots, x(T)\}$, т. е. имеем задачу нахождения экстремума функций $(n-1)$ переменных

$$I = \min\left[\varphi(x(0), \ldots, x(it_{\downarrow}0), \ldots, x(t))\right], \quad \left\{x(1T_0), \ldots, x\left[(n-1)T_0\right]\right\} \qquad (16)$$

при условии

$$x(0T_0) = x_0,\ x(nT_0) = x(T). \qquad (17)$$

Эта задача относится к классу задач нелинейного программ программирования с краевыми условиями (17), решение которой можно осуществить известными методами.

Таким образом, решив оптимизационную задачу (16) совместно с определением управления (13), находим решение поставленной задачи оптимального управления объектом на интервале *(0, T)* с фиксированными краевыми условиями.

Список литературы

1. *Красовский А.А.* Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М., 1968.

2. *Либов Р.* Введение в теорию кинетических уравнений. М., 1972.

3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.

4. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.

5. *Салихов З.Г., Арунянц Г.Г., Рутковский А.Л.* Системы оптимального управления сложными технологическими объектами. М., 2004.

Об авторах

Александр Леонидович Рутковский — д-р техн. наук, проф., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (СКГМИ (ГТУ)), Владикавказ.
E-mail: rutkowski@mail.ru

Геннадий Георгиевич Арунянц — д-р техн. наук, проф., Калининградский государственный технический университет (КГТУ), Калининград.
E-mail: suro99@mail.ru

Мария Александровна Ковалева — канд. техн. наук, доц., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (СКГМИ (ГТУ)), Владикавказ.
E-mail: mary_kovaleva@list.ru

Надя Валериевна Тедеева — ассист., Северо-Кавказский горно-металлургический институт (СКГМИ (ГТУ)), Владикавказ.
E-mail: nadiatedeeva@mail.ru

About the authors

Prof. Alexander Rutkovsky, North Caucasian Mining and Metallurgical Institute, Vladikavkaz.
E-mail: rutkowski@mail .ru

Prof. Gennady Arounyants, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.
E-mail: suro99@mail.ru

Dr Maria Kovalyova, ass. prof., North Caucasian Mining and Metallurgical Institute, Vladikavkaz.
E-mail: mary_kovaleva@list.ru

Nadia Tedeeva, ass., North Caucasian Mining and Metallurgical Institute, Vladikavkaz.
E-mail: nadiatedeeva@mail.ru