

сом Чженя [2, с. 159], то получаем противоречие с условием $C(N) \neq 0$.

Таким образом, $\eta \neq 0$. Заметим, что сужение $\sigma|_M$ будет послойной эрмитовой метрикой в $-K_M|_M$ неположительной кривизны. Следовательно, голоморфное сечение η параллельно относительно метрики $\sigma|_M$ [4, замечание 7] и поэтому χ всюду отлично от нуля. Остается использовать [2, с. 159] (см. выше) и соотношение $C(N) \neq 0$.

Приведем пример, который показывает, что нежесткость вложения в теореме является существенной. Напомним, что поверхностью Ферма $S_d \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ ($n > 0$) называется множество нулей однородного многочлена

$$\sum_{i=0}^{n+1} (z^i)^d$$

(здесь $\{z^i\}$ — однородные координаты).

Если $d > n+2$, то S_d — гладкая гиперповерхность с отрицательным каноническим пучком. Кроме того, S_d содержит рациональную кривую $N \cong \mathbb{CP}^1$ вида

$$z^0 = u, z^1 = \eta u, z^2 = v, z^3 = \eta v, z^4 = 0, \dots, z^{n+1} = 0.$$

(η — корень d -й степени из -1). Поскольку $C(N) \neq 0$ и $C_1(S_d) < 0$ (группа $\text{Aut}(N)$ недискретна), то в силу доказанной выше теоремы вложение $N \hookrightarrow S_d$ является жестким.

Библиографический список

1. Siu Y.T. Complex-analyticity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems // J. diff. geom. 1982. V. 17. P. 55–138.

2. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Пер. с англ. М.: Наука, 1986. 224 с.

3. Чинак Р. Б. Автоморфизмы эрмитовых многообразий // Всесоюзная школа-сем. по компл. анализу: Тез. докл. Красноярск, 1987. С. 127.

4. Kobayashi S., Wu H.-H. On holomorphic sections of certain hermitian vector bundles // Math. Ann. 1970. V. 189. P. 1–4.

УДК 514.75

ОБ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Шевченко
(Калининградский ун-т)

Основная задача дифференциальной геометрии поверхности

проективного пространства по Г.Ф.Лаптеву и Н.М.Остиану состоит в построении оснащения Э.Картана. Если рассматривать поверхность как многообразие касательных плоскостей, то эту задачу необходимо переформулировать в пользу нормализации А.П.Нордена.

Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_j\}$ ($j, k = \overline{1, n}$), дифференционные формулы которого запишем в виде

$$dA = \theta A + \omega^j A_j, \quad dA_j = \theta A_j + \omega_j^k A_k + \omega_j A, \quad (1)$$

где θ — некоторая 1-форма, а структурные формы $\omega^j, \omega_j^k, \omega_j$ проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n , удовлетворяют уравнениям Картана (см., например, [1, с. 173]):

$$\begin{cases} d\omega^j = \omega^j \wedge \omega_j^k, & d\omega_j = \omega_j^k \wedge \omega_j, \\ d\omega_j^k = \omega_j^k \wedge \omega_k + \omega_j \wedge \omega^j + \delta_j^k \omega_k \wedge \omega^k. \end{cases} \quad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим локальную m -поверхность X_m ($0 < m < n$) как семейство центрированных касательных плоскостей T_m . Произведем разбиение значений индексов: $J = (i, a)$:

$$i, j, k = \overline{1, m}; \quad a, b, c = \overline{m+1, n}.$$

Репером нулевого порядка поверхности X_m является репер $\{A, A_i, A_a\}$, вершины A, A_i , которого помещены на касательную плоскость T_m , причем вершина A — в ее центр. Из формул (1) вытекает система дифференциальных уравнений поверхности X_m :

$$\omega^a = 0, \quad \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j. \quad (3)$$

Продолжая эту систему, найдем

$$\nabla \Lambda_{ij}^a \equiv 0 \quad (\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a), \quad (4)$$

где символ \equiv означает сравнение по модулю базисных форм ω^i , а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \Lambda_{ij}^a = d \Lambda_{ij}^a - \Lambda_{ik}^a \omega_j^k - \Lambda_{kj}^a \omega_i^k + \Lambda_{ij}^c \omega_c^a.$$

Коэффициенты Λ_{ij}^a в системе (3) образуют фундаментальный тензор I-го порядка поверхности X_m , представляющей как многообразие касательных плоскостей.

Из структурных уравнений (2) группы $GP(n)$ и дифференциальных уравнений (3) поверхности X_m вытекает, что с последней ассоциируется расслоение $G(X_m)$ со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (5)$$

$$d\omega_j^i = \omega_k^k \wedge \omega_j^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \quad (6)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \quad (7)$$

$$d\omega_e^a = \omega_e^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{ei}^a, \quad (8)$$

$$d\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_e^e \wedge \omega_{ei}^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i, \quad (9)$$

где $d\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^e \wedge \omega_e$.

$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \quad \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a,$$

$$\omega_{ei}^a = -\Lambda_{ij}^a \omega_e^j - \delta_e^a \omega_i, \quad \omega_{aj}^i = -\delta_j^i \omega_a.$$

Базой главного расслоения $G(X_m)$ является поверхность X_m , а типовым слоем — подгруппа стационарности $G \subset GP(n)$ центрированной плоскости T_m , причем

$$\begin{aligned} \dim G &= \dim GP(n) - \dim Gr(m,n) - \dim T_m = \\ &= n^2 - nm + m^2 + n, \end{aligned}$$

где $Gr(m,n)$ обозначает многообразие Грассмана m -плоскостей в пространстве P_n . С другой стороны, размерность группы G равна числу вторичных форм в репере нулевого порядка.

Ассоциированное расслоение $G(X_m)$ содержит четыре главных подрасслоения с той же базой X_m : 1) расслоение реперов $A^*(X_m)$ со структурными уравнениями (5)–(7), типовой слой которого есть коффинная (центропроективная) группа $A = GA^*(m) \subset G$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m ; 2) расслоение касательных линейных реперов $L(X_m)$ (5), (6) с типовым слоем — линейной группой $L = GL(m) \subset A^*$, действующей в связке касательных прямых (ср. [2, с.59]); 3) расслоение $H(X_m)$ (5), (6), (8), (9), типовой слой — группа Ли $H \subset G$ размерности

$$\dim H = \dim G - \dim Gr(n-1, n) = n^2 - nm + m^2,$$

действующая в связке гиперплоскостей с центром A ; 4) расслоение двойственных линейных реперов $L^*(X_m)$ (5), (8), типовой слой — линейная группа $L^* = GL(n-m) \subset H$, действующая в пучке гиперплоскостей с осью T_m . Указанные группы Ли удовлетворяют соотношениям: $L \subset A^* \subset G \supset H \supset L^*$, $A^* \cap H = L$, $L \cup L^* \neq H$, $A^* \cup H \neq G$.

Здесь точнее говорить о некоторых фактор-группах группы G , изоморфных ее соответствующим подгруппам.

Поясним действия групп Ли. Из формул (1) с учетом уравне-

ний (3) при фиксации плоскости T_m получим

$$\delta A = v A, \quad \delta A_i = v A_i + \pi_i^j A_j + \pi_i A, \quad (10)$$

где

$$\delta = d|_{\omega^k=0}, \quad v = \theta|_{\omega^k=0}, \quad \pi_i^j = \omega_i^j|_{\omega^k=0}, \quad \pi_i = \omega_i|_{\omega^k=0}.$$

Откуда видно, что в образующей плоскости T_m действует коффинная группа A^* со структурными формами π_i^j , π_i . Далее, уравнения стационарности точки $M = A + x^j A_j \in P_n$ имеют вид

$$dx^j = x^j (x^j \omega_j - \omega_j^j) - \omega^j. \quad (II)$$

Произвольная гиперплоскость, проходящая через точку A , задается уравнением

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \xi_j x^j = 0. \quad (12)$$

Дифференцируя левую часть уравнения (12) с помощью уравнений (II) при $\omega^k = 0$, найдем $\delta F = F x^j \pi_j + x^j (\delta \xi_j - \xi_j \pi_j^j)$, отсюда получим условия относительной инвариантности гиперплоскости (12)

$$\delta \xi_i = \omega \xi_i + \xi_j \pi_i^j, \quad (13)$$

$$\delta \xi_a = \omega \xi_a + \xi_e \pi_a^e + \xi_a \pi_a^e, \quad (14)$$

где ω — I-форма, играющая роль множителя пропорциональности. Из аналогии между уравнениями (10) и (13), (14) следует, что в связке гиперплоскостей с центром A действует группа H со структурными формами π_i^j , π_a^e , π_a^i . Наконец, уравнения (13) показывают, что функции ξ_i образуют тензор, поэтому равенства $\xi_i = 0$ имеют инвариантный смысл, состоящий в том, что гиперплоскость (12) содержит касательную плоскость T_m . В этом случае уравнения (12), (14) упрощаются: $\xi_a x^a = 0$, $\delta \xi_a = \omega \xi_a + \xi_e \pi_a^e$. Тогда ясно действие линейной группы L^* с формами π_a^e .

Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G(X_m)$ задается по Лаптеву [3, с.63, 83] с помощью объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ei}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}\}$:

$$\begin{cases} \nabla \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i \equiv 0, & \nabla \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k \omega_k + \omega_{ij} \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_{ei}^a + \omega_{ei}^a \equiv 0, & \nabla \Gamma_{aj}^i + \Gamma_{aj}^e \omega_e^i - \Gamma_{kj}^i \omega_a^k + \omega_{aj}^i \equiv 0, \\ \nabla \Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^j \omega_j + \Gamma_{ai}^e \omega_e - \Gamma_{ji}^i \omega_a \equiv 0. \end{cases} \quad (15)$$

Объект связности Γ содержит четыре существенных подобъекта:

$$\Gamma_1 = \{\Gamma_{jk}^i\}, \quad \Gamma_2 = \{\Gamma_{jk}^i\}, \quad \Gamma_3 = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ki}^a, \Gamma_{aj}^i\}, \quad \Gamma_4 = \{\Gamma_{ei}^a\},$$

задающих связности в указанных выше подрасслоениях.

Произведем оснащение Картана [4] поверхности X_m , состоящее в задании поля плоскостей C_{n-m-1} ($C_{n-m-1} \cap T_m = \emptyset$). Плоскость Картана C_{n-m-1} определим базисными точками $B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A$, причем коэффициенты λ_a^i, λ_a удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aj}^i \omega_j^i, \quad (16)$$

$$\nabla \lambda_a + \lambda_a^i \omega_i + \omega_a = \lambda_{ai} \omega^i, \quad (17)$$

обеспечивающим относительную инвариантность плоскости C_{n-m-1} .

Отметим, что квазитензор λ_a^i определяет нормаль I-го рода $N_{n-m} = A + C_{n-m-1}$ с помощью системы уравнений $x^i = \lambda_a^i x^a$.

Теорема I. Оснащение Картана поверхности X_m позволяет свести задание фундаментально-групповой связности Γ в ассоциированном расслоении $G(X_m)$ к заданию коффинной связности Γ_1 в подрасслоении $A^*(X_m)$ и линейной связности Γ_4 в подрасслоении $L^*(X_m)$.

Доказательство. Продолжая уравнения (16), (17), получим

$$\nabla \lambda_{aj}^i - \lambda_a^i \omega_{aj}^k + \lambda_a^k \omega_{kj}^i + \omega_{aj}^i = 0, \quad (18)$$

$$\nabla \lambda_{ai} - \lambda_a^i \omega_{ai}^k + \lambda_{ai}^j \omega_j + \lambda_{ai}^j \omega_{ji} = 0. \quad (19)$$

Продолжение оснащающего по Картану квазитензора $\{\lambda_a^i, \lambda_a\}$ и подобъекты связностей Γ_1, Γ_4 охватывают остальные компоненты $\Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}$ объекта Γ по формулам:

$$\Gamma_{aj}^i = \lambda_{aj}^i + \lambda_e^i \Gamma_{aj}^e - \lambda_a^k \Gamma_{kj}^i, \quad \Gamma_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_e^i \Gamma_{ai}^e - \lambda_a^j \Gamma_{ji}, \quad (20)$$

вытекающим из соотношений (15)–(19).

Теперь вместо оснащения Картана осуществим нормализацию А.П.Нордена [5, с. 197] поверхности X_m , которая состоит в задании на ней поля двух плоскостей, называемых нормалами. Нормаль I-го рода N_{n-m} ($N_{n-m} \cap T_m = A$) определим с помощью квазитензора λ_a^i . Нормаль 2-го рода N_{m-1} ($A \in N_{m-1} \subset T_m$) зададим совокупностью базисных точек $B_i = A_i + \lambda_i A$, причем

$$\nabla \lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij} \omega^j. \quad (21)$$

Теорема 2. Нормализация Нордена поверхности X_m индуцирует фундаментально-групповую связность в ассоциированном расслоении $G(X_m)$.

Доказательство. Продолжая систему уравнений (21), получим

$$\nabla \lambda_{ij} - \lambda_k \omega_{ij}^k + \omega_{ij} \equiv 0. \quad (22)$$

Фундаментальный тензор Λ_{ij}^a и нормализующие квазитензоры λ_a^i, λ_i вместе со своими пфаффовыми производными $\lambda_{aj}^i, \lambda_{ij}$ охватывают компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\begin{cases} \Gamma_{jk}^i = \lambda_{jk}^i \lambda_a^i - \delta_j^i \lambda_k - \delta_k^i \lambda_j, & \Gamma_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_{ij}^a \lambda_a^k \lambda_k - 2 \lambda_i \lambda_j, \\ \Gamma_{ei}^a = -\lambda_{ij}^a \lambda_e^i - \delta_e^a \lambda_i, & \Gamma_{aj}^i = \lambda_{aj}^i + \lambda_a^k (\delta_j^i \lambda_k - 2 \lambda_{jk}^e \lambda_e^i), \\ \Gamma_{ai} = \lambda_{ai}^i \lambda_j - \lambda_a^i \lambda_{ji} + 2 \lambda_a^i (\lambda_i \lambda_j - \lambda_{ij}^e \lambda_e^k \lambda_k). \end{cases} \quad (23)$$

вытекающим из соотношений (4), (15), (16), (18), (21), (22).

Замечания: 1) формулы (20) получались другим путем [6]; 2) для компонент (23) выполняется лишь первая группа формул (20); 3) теорема 2 доказывалась двумя иными способами [6][7].

Выводы

I. Нормализация А.П.Нордена поверхности позволяет задавать в ассоциированном расслоении фундаментально-групповые связности трех типов, причем индуцированные линейная связность (в классической терминологии – внутренняя аффинная [5, с. 201]), определяемая объектом Γ_{jk}^i , и двойственная ей линейная связность (называемая нормальной [2, с. 60] или внешней [5, с. 203]) с объектом Γ_{ei}^a не зависят от типа фундаментально-групповой связности.

2. С точки зрения расслоений основную задачу [8, с. 39], [9, с. 244] проективной дифференциальной геометрии поверхности нужно уточнить, отдавая предпочтение нормализации Нордена перед оснащением Картана.

Библиографический список

И.Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 224с.

2. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n //Проблемы геометрии// ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 55–74.

3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии// ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. 248с.

4. Картан Э. Пространства проективной связности// Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.; Л., 1937. Вып. 4, С. 160-173.

5. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432с.

6. Шевченко Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 115-120.

7. Шевченко Ю.И. Об оснащении многомерной поверхности проективного пространства// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып. 8. С. 135-150.

8. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей// Геометрия. 1963. Итоги науки/ ВИНИТИ. М., 1965. С. 5-64.

9. Остин Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства// Тр. геометр. семинара/ ВИНИТИ. М., 1966. Т. I. С. 239-263.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ШЕСТИКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В. Шмелева

(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций \mathcal{K} линейчатых квадрик Q с одной невырождающейся шестикратной фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию \mathcal{K} к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0, A_3 совмещаются с фокальными точками квадрики $Q \in \mathcal{K}$, а ребра A_0A_1, A_3A_1 — с прямолинейными образующими квадрики $Q \in \mathcal{K}$. Здесь и в дальнейшем $i, \hat{i}, k = 1, 2; i \neq \hat{i}$ и по индексам i и \hat{i} суммирование не производится.

Конгруэнция \mathcal{K} определяется следующей системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^{\hat{i}} = a_{ik}^{\hat{i}} \omega^k, \quad \omega_i^3 = (\delta_k^{\hat{i}} + c_{ik}) \omega^k, \\ \omega_i^{\hat{i}} = (\epsilon_k^{\hat{i}} + \lambda_{ik}) \omega^k, \quad \omega_3^{\hat{i}} = \epsilon_k^{\hat{i}} \omega^k, \quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \\ \Omega \equiv \omega_0^0 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = h_k \omega^k, \end{cases} \quad (I)$$

причем

$$B_1^1 \lambda_{12} - \lambda_{11} \epsilon_2^1 + \lambda_{22} \epsilon_1^2 - \lambda_{21} \epsilon_2^2 = 0 \quad (2)$$

Для линии $\omega^i = t^i \vartheta$ (где ϑ — параметрическая форма [I, с. 41]) на фокальной поверхности (A_0) конгруэнции \mathcal{K} однозначно определяется присоединенная квадрика Q_t :

$$t^1 \tilde{F}_1 + t^2 \tilde{F}_2 = 0, \quad (3)$$

где

$$\tilde{F}_i \equiv h_i x^i x^2 - a_{ii}^i (x^i)^2 - a_{ii}^{\hat{i}} (x^{\hat{i}})^2 + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0. \quad (4)$$

Уравнения $\tilde{F}_i = 0$ определяют квадрики Q_t , которые мы называем ассоциированными квадриками.

Определение 1. Линией c_i (соответственно k) на поверхности (A_0) называется линия, для которой точки A_i и A_0 (соответственно A_1 и A_2) полярно сопряжены относительно присоединенной квадрики Q_t ; линией a_i называется линия на поверхности (A_0), для которой точка $A_i \in Q_t$.

Определение 2. Конгруэнцией \mathcal{K}_n назовем конгруэнцию \mathcal{K} , имеющую одну невырождающуюся поверхность (A_0) кратности не меньше, чем n . Конгруэнцией $\hat{\mathcal{K}}$ назовем конгруэнцию \mathcal{K} квадрик с фокальной парой прямых, пересекающихся в точке A_0 .

В силу свойств конгруэнций квадрик в P_3 имеем следующую классификационную схему:

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_3 \rightarrow \mathcal{K}_4 \rightarrow \mathcal{K}_5 \rightarrow \mathcal{K}_6 \rightarrow \mathcal{K}_7 \rightarrow \dots \rightarrow \hat{\mathcal{K}}.$$

Подклассы $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ исследованы достаточно подробно в работах [2], [3]. Одним из наиболее замечательных подклассов конгруэнций \mathcal{K} являются конгруэнции $\mathcal{N} \in \mathcal{K}_4$ — конгруэнции \mathcal{K} с неопределенными линиями c_1 и c_2 .

Конгруэнции \mathcal{N} определяются системой пифагоровых уравнений

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^{\hat{i}} = a_{ik}^{\hat{i}} \omega^k, \quad \omega_i^3 = \omega^{\hat{i}}, \\ \omega_3^{\hat{i}} = \epsilon_k^{\hat{i}} \omega^k, \quad \Omega \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = h_k \omega^k, \\ \omega_i^{\hat{i}} = (\epsilon_k^{\hat{i}} + \lambda_{ik}) \omega^k, \quad \omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

и конечными соотношениями

$$\begin{cases} \lambda_{12} \epsilon_1^1 - \lambda_{11} \epsilon_2^1 + \lambda_{22} \epsilon_1^2 - \lambda_{21} \epsilon_2^2 = 0, \\ 2 a_{i\hat{i}}^{\hat{i}} + h_i = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Конгруэнции \mathcal{N} обладают следующими характеристическими признаками (см. [3]):