ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

О. С. Редозубова

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ПАР Θ КОНГРУЭНЦИЙ

В данной статье рассмотрены такие пары Θ конгруэнций [1] , соответствующие прямые которых проходят через фокусы конгруэнции общих перпендикуляров. Кроме того, соответствующие прямые этих пар либо лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров (n° I, II) , либо являются нормалями фокальных поверхностей этой конгруэнции (n° III) , либо соответственно параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров (n° IV) .

Поместим вершину ортонормированного репера $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ на прямой конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров, $\vec{e}_3$ выберем параллельно τ . Соответствующие прямые τ_a пары Θ пересекают τ в точках $\mathcal{K}_a$ $(a=1,2)$. $(\mathcal{K}_a)$ -фокальные поверхности данной конгруэнции $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. Пусть F_a , F'_a -фокусы прямых τ_a пары Θ. Прямые τ_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a . $\overrightarrow{\mathcal{K}F_a}=\rho_a\vec{\eta}_a$, $\overrightarrow{\mathcal{K}F'_a}=\rho'_a\vec{\eta}_a$, так что ρ_a , ρ'_a -абсциссы фокусов прямых конгруэнции $\{\tau_a\}$. $\overrightarrow{0\mathcal{K}_a}=h_a\vec{e}_3$, $\vec{\eta}_a=\vec{e}_1\cos\alpha_a+\vec{e}_2\sin\alpha_a$ —направляющие векторы прямых τ_a

Известно [1] , что пара Θ определяется требованиями того, чтобы касательные плоскости фокальных поверхностей

(F_1) , (F'_1) прошли соответственно через точки F_2 , F'_2 , а фокальные поверхности (F_2) , (F'_2) имели касательные плоскости, проходящие соответственно, через точки F'_1 , F_1 : $(d\vec{F}_1,\vec{\eta}_1,\overrightarrow{F_1F_2})=0$, $(d\vec{F}'_1,\vec{\eta}_1,\overrightarrow{F'_1F'_2})=0$, $(d\vec{F}_2,\vec{\eta}_2,\overrightarrow{F_2F'_1})=0$, $(d\vec{F}'_2,\vec{\eta}_2,\overrightarrow{F'_2F_1})=0$.

После некоторых преобразований получим систему уравнений, определяющую пары Θ[1]:

$$
\begin{aligned}
&H_1\rho_2+Q_1-A_1\rho_1+\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_1\rho'_2+Q_1-A_1\rho'_1+\Omega_{13}\frac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_2\rho'_1+Q_2-A_2\rho_2+\Omega_{23}\frac{\rho'_1\rho_2}{h_1-h_2}=0,\\
&H_2\rho_1+Q_2-A_2\rho'_2+\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho'_2}{h_1-h_2}=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Компоненты инфинитезимальных перемещений репера R ω^i, ω^j_i $(i,j,\kappa=1,2,3)$ удовлетворяют условиям:

$$d\vec{\theta}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega^j_i\vec{e}_j,\quad \omega^j_i=-\omega^i_j.$$

Известно [1] , что пары Θ могут быть четырех классов: Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 . Пары Θ_1 характеризуются условиями $\rho=\rho'_1\rho_2-\rho_1\rho'_2$, $g=\rho_1\rho_2-\rho'_1\rho'_2$, пары Θ_2-условиями $\rho=0$, $g\neq 0$, пары Θ_3-условиями $\rho\neq 0$, $g=0$, пары Θ_4 -условиями $\rho=g=0$.

В формулах (1) : $H_a=\dfrac{\omega^3+dh_a}{h_1-h_2}$, $A_a=\dfrac{\omega^2_1+d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$,

$$\Omega_a=\omega^1\cos\alpha_a+\omega^2\sin\alpha_a,\quad \Omega^*_a=\omega^1\sin\alpha_a-\omega^2\cos\alpha_a,$$

$$\Omega_{a3}=\omega^3_1\cos\alpha_a+\omega^3_2\sin\alpha_a,\quad \Omega^*_{a3}=-\omega^3_1\sin\alpha_a+\omega^3_2\cos\alpha_a,$$

$$\Theta_a=\frac{\Omega^*_a+h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Обозначим касательные плоскости фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_a)$ конгруэнции $\{\tau\}$ через Π_a .

I. Предположим, что $\tau_a\subset\Pi_a$. Тогда $(d\vec{\mathcal{K}}_a,\vec{\eta}_a,\vec{e}_3)=0$, и, следовательно, $Q_a=0$ (2) . Пары Θ_1 определяются системой:

5 Зак. 14409

$$A_1 \rho - Q_1 \tau_2 + \Omega_{13} \frac{\rho_2 \rho_2' \tau_1}{h_1 - h_2} = 0, \quad H_1 \rho - Q_1 \tau_1 + \Omega_{13} \frac{\rho_1 \rho_1' \tau_2}{h_1 - h_2} = 0,$$
$$-A_1 g + Q_2 \tau_1 + \Omega_{23} \frac{\rho_1 \rho_1' \tau_2}{h_1 - h_2} = 0, \quad H_2 g - Q_2 \tau_2 + \Omega_{23} \frac{\rho_2 \rho_2' \tau_1}{h_1 - h_2} = 0, \tag{3}$$

где $\tau_a = \rho_a - \rho_a'$ -расстояние между фокусами конгруэнции τ_a. Подставляя (2) в систему (3), получим:

$$A_1 = -\Omega_{13} \frac{\rho_2 \rho_2' \tau_1}{\rho (h_1 - h_2)}, \quad A_2 = \Omega_{23} \frac{\rho_1 \rho_1' \tau_2}{g (h_1 - h_2)},$$
$$H_1 = -\Omega_{13} \frac{\rho_1 \rho_1' \tau_2}{g (h_1 - h_2)}, \quad H_2 = -\Omega_{23} \frac{\rho_2 \rho_2' \tau_1}{g (h_1 - h_2)}. \tag{4}$$

Дифференцируя (2) внешним образом и подставляя (4), получим систему уравнений:

$$\rho_1 \rho_1' \tau_2 - \rho_2 \rho_2' \tau_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0, \quad \rho_1 \rho_1' \tau_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \rho_2 \rho_2' \tau_1 = 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет только нулевое решение $\rho_1 \rho_1' \tau_2 = 0$, $\rho_2 \rho_2' \tau_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 \rho_1' = \rho_2 \rho_2' = 0$, так как $\tau_a \neq 0$ как расстояние между фокусами прямых. Но тогда либо $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и $\rho = 0$, что неверно для пар Θ_1, либо $\rho_1 = \rho_2' = 0$ и $g = 0$, что также неверно. Итак, не может быть пар Θ_1 при условии, что $\tau_a \subset \Pi_a$.

В случае пары Θ_2 [1] при подстановке в уравнения этой пары уравнений (2) получим $\rho_1' \rho_2 = \rho_1 \rho_2' = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0$ (или $\rho_1' = \rho_2' = 0$). Поверхности (F_a) и $(\mathcal{K}_a)$ совпадают, и касательная плоскость поверхности (F_2) проходит через F_1, а не через F_1', как это требуется для пары Θ. Следовательно, этот случай невозможен. Аналогично и в случае $\rho_1' = \rho_2' = 0$. Итак, не существует пар Θ_2 таких, что $\tau_a \subset \Pi_a$. Точно так же можно показать, что ни пар Θ_3, ни пар Θ_4 здесь не существует. Доказана

Т е о р е м а 1. Не существует пар Θ, для которых $\tau_a \subset \Pi_a$.

II. Рассмотрим теперь случай, когда $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$. Здесь $\Omega_1^* + h_2 \Omega_{13}^* = 0$, $\Omega_2^* + h_1 \Omega_{23}^* = 0$. Эти уравнения приводятся к виду:

$$Q_1 = \{\Omega_{13} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \Omega_{23}\} \frac{h_1 - h_2}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}, \tag{5}$$

$$Q_2 = \{\Omega_{23} \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \Omega_{13}\} \frac{h_1 - h_2}{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \tag{6}$$

Пары Θ_1 определяются системой уравнений (3), (5), (6). Можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а 2. Пары Θ_1, для которых $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$, существуют с произволом в две функции одного аргумента. Не существует пар $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, обладающих этим свойством.

Дифференцируя внешним образом (5), (6) и подставляя выражения H_a, A_a, найденные из (3), получим систему уравнений:

$$(h_1 - h_2)^2 (\rho_2 + \rho_2') + \rho_2 \rho_2' (\rho_1 + \rho_1') \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$
$$\rho_1 \rho_1' (\rho_2 + \rho_2') \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2 (\rho_1 + \rho_1') = 0. \tag{7}$$

Так как $\rho_2 + \rho_2'$ и $\rho_1 + \rho_1'$ одновременно не могут быть нулями, то определитель системы равен нулю. Получим:

$$(h_1 - h_2)^4 = \rho_1 \rho_1' \rho_2 \rho_2' \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{8}$$

Уравнения системы (7) линейно зависимы, откуда следует:

$$\rho_2 + \rho_2' = -(\rho_1 + \rho_1') \frac{\rho_2 \rho_2' \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^2}. \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) есть необходимые условия пары Θ_1, у которой $\tau_1 \subset \Pi_2$, $\tau_2 \subset \Pi_1$. Из (8) следует

Т е о р е м а 3. У пары Θ, соответствующие прямые которой лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, четвертая степень расстояния между соответствующими прямыми пары равна произведению абсцисс фокусов и квадрата косинуса угла между прямыми.

Отнеся конфигурацию к трехграннику Гишара [2], будем иметь
$$\omega^1 = -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \omega_1^3, \tag{10}$$
где $2\hat{\rho} = 2h$ – расстояние между фокусами конгруэнции $\{\tau\}$, 2φ – угол между фокальными плоскостями этой конгруэнции. Вершина репера R будет находиться в центре прямой τ, а оси $\vec{e}_a$ – в биссекторных плоскостях конгруэнции $\{\tau\}$. Подставляя (10) в уравнения (5), (6), получим, приравнивая нулю коэффициенты при линейно независимых формах ω_1^3, ω_2^3,
$$\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\alpha_1 - h_2 \sin\alpha_1 = 0, \quad -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \sin\alpha_1 + h_2 \cos\alpha_1 = 0,$$
$$\hat{\rho}\, \mathrm{tg}\,\varphi \cdot \cos\alpha_2 - h_1 \sin\alpha_2 = 0, \quad -\hat{\rho}\, \mathrm{ctg}\,\varphi \cdot \sin\alpha_2 + h_1 \cos\alpha_2 = 0,$$
откуда получим: $\mathrm{tg}^2\varphi = \mathrm{tg}^2\alpha_1 = \mathrm{tg}^2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 = -\varphi$. Таким образом, прямые τ_a пары равнонаклонны к биссекторным плоскостям конгруэнции общих перпендикуляров и находятся на равных расстояниях от центра прямой τ этой конгруэнции. Такие пары называются симметричными. Заметим, что пары Θ_1 данного вида не могут быть ортогональными, что следует из уравнений (7), а, значит, конгруэнция общих перпендикуляров не может быть нормальной (здесь угол между соответствующими прямыми конгруэнтен углу между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров). Получена

Т е о р е м а 4. Пары Θ_1, соответствующие прямые которой лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, есть симметричные пары, причем конгруэнция общих перпендикуляров не может быть нормальной.

Найдем полные кривизны фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_a)$ конгруэнции $\{\tau\}$. Для этого используем формулы [2].

$$K^1 = \frac{-(\omega_1^3 \sin\varphi - \omega_2^3 \cos\varphi) \wedge (\omega_1^2 + d\varphi) \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{(\omega^3 + d\hat{\rho}) \wedge \hat{\rho} \cdot (\omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi)}.$$
Подставляя сюда $\varphi = -\alpha_1$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, а также $\hat{\rho} = h$ и выражения H_a, A_a, найденные из (3), получим для K^1 выражение
$$K^1 = -\frac{\rho \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{g (h_1 - h_2)^2}.$$
Аналогично для полной кривизны поверхности $(\mathcal{K}_2)$ в точке $\mathcal{K}_2$.
$$K^2 = -\frac{g \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho (h_1 - h_2)}.$$
Тогда
$$K^1 \cdot K^2 = \frac{\sin^4(\alpha_1 - \alpha_2)}{(h_1 - h_2)^4} = \frac{\sin^4 2\varphi}{(2\hat{\rho})^4}.$$
Но известно, что $\frac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = d$ равно расстоянию между граничными точками конгруэнции $\{\tau\}$. Следовательно,
$$K^1 \cdot K^2 = \frac{1}{d^4}. \tag{11}$$
Из [2] известно, что это свойство характеризует конгруэнцию W. Итак, получена

Т е о р е м а 5. Если к конгруэнции $\{\tau\}$ присоединена пара Θ так, что соответствующие прямые лежат в фокальных плоскостях конгруэнции $\{\tau\}$, то данная конгруэнция есть конгруэнция W.

III. Если $\{\tau_a\}$ – конгруэнция нормалей фокальной поверхности $(\mathcal{K}_a)$, то, как показано в [3], пары Θ существуют с произволом в две функции одного аргумента (пары Θ_4). Кроме того доказано, что конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров является конгруэнцией B, а пары Θ – симметричными.

IV. Пусть, наконец, $\tau_1 \parallel \vec{N}_2$, $\tau_2 \parallel \vec{N}_1$, где $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – векторы нормалей фокальных поверхностей $(\mathcal{K}_1)$, $(\mathcal{K}_2)$ конгруэнции $\{\tau\}$. В данном случае выполняются условия:
$$\Omega_1 - h_2 \Omega_{13} = 0, \quad \Omega_2 - h_1 \Omega_{23} = 0. \tag{12}$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$Q_1=\Omega_{13}\frac{(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)},\quad Q_2=\frac{(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}. \tag{13}$$

Пары θ_1 определяются системой уравнений (3), (13). После дифференцирования (13) внешним образом и подстановки H_a и A_a, найденных из (3), получим уравнения:

$$\begin{gathered}\tau_1^2(h_1-h_2)^2(\rho_1+\rho_1')\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1\rho_1'\tau_2^2(\rho_1+\rho_1')\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0,\\ -\tau_1^2(\rho_2+\rho_2')\rho_2\rho_2'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+\tau_2^2(h_1-h_2)^2(\rho_1+\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Так как система должна иметь ненулевые решения $\rho_1+\rho_1'$ и $\rho_2+\rho_2'$ (в противном случае существовали бы пары θ_4), то определитель системы равен нулю. Имеем:

$$(h_1-h_2)^4\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1\rho_1'\rho_2\rho_2'\sin^4(\alpha_1-\alpha_2)=0, \tag{15}$$

из двух уравнений (14) независимо только одно. Имеет место

Т е о р е м а 6. Пары θ_1, у которых соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, существуют с произволом в две функции одного аргумента. Не существует пар θ_2, θ_3, θ_4, обладающих таким свойством.

Относя конфигурацию к трехграннику Гишара, получим из (13) с учетом (10) систему уравнений, из которой следует, что $\alpha_1=-\alpha_2$. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 7. Пары θ конгруэнций, у которых соответствующие прямые параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров, являются симметричными, и угол между фокальными плоскостями этой конгруэнции конгруэнтен углу между соответствующими прямыми пары.

Список литературы.

I. Р е д о з у б о в а О.С. Метрические свойства пар θ

конгруэнций.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1975, с.143-168.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. ГИТТЛ, М.-Л. 1950, с.73-94.

3. Р е д о з у б о в а О.С. Пары θ нормальных конгруэнций.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.86-93.