Список литературы

1.Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.-"Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та им.В.И.Ленина,"1965, №243,с.29-37.

2.Р ы ж к о в В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-"Итоги науки.Сер.Геометрия,1963."(ВИНИТИ АН СССР),М.,1965,с.65-100.

3.Ф и н и к о в С.П.Метод внешних форм Картана.М.-Л., ГИТТЛ,1948,с.432.

4.С т о л я р о в А.В.О некоторых свойствах плоских сетей с совпадающими псевдофокусами.-"Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та им.В.И.Ленина,1967,№271,с.167-180.

Л.Г.К о р с а к о в а

О ПАРЕ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3 ,КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется пара (C_1,C_2) конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник,касающихся линии пересечения своих плоскостей в одной точке.Построен геометрически фиксированный репер пары (C_1,C_2),рассматриваются ассоциированные конгруэнции квадрик.Найдены условия инцидентности всех коник семейств (C_1) и (C_2) инвариантной квадрике.

§1. Пары $\mathcal{L}$.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1,C_2) конгруэнций коник C_1,C_2 не лежащих в одной плоскости и касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2 в одной точке A_1.

Пара (C_1,C_2) называется парой $\mathcal{L}$,если плоскости α_1 и α_2 описывают двупараметрические семейства.

Отнесем пару $\mathcal{L}$ к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$,где A_2-точка,инцидентная прямой ℓ ,точки A_3 и A_4 выбираются таким образом, что треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ являются автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,4) \qquad (1.1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 \qquad (1.3)$$

Коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) в построенном репере R определяются соответственно уравнениями

$$(x^2)^2 - 2p\,x^1x^4 = 0, \quad x^3 = 0 \qquad (1.4)$$

$$(x^2)^2 - 2q\,x^1x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \qquad (1.5)$$

Так как плоскости коник C_1 и C_2 образуют двупараметрические семейства, то ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4\}$, $\{\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_4^3\}$ должен равняться двум. Выберем формы ω_1^4, ω_2^4 за независимые первичные. Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i \quad (i,j,\kappa = 1,2) \qquad (1.6)$$

Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ запишется в виде:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{2\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4\kappa}\omega_\kappa,$$

$$\omega_4^3 = \Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_4^2 - p\omega_2^1 = \lambda^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_3^2 - q\omega_2^1 = \mu^\kappa\omega_\kappa,$$

$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{1\kappa}\omega_\kappa, \qquad (1.7)$$

$$\omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 - d\ln p = a^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2 - d\ln q = b^\kappa\omega_\kappa.$$

Анализируя систему уравнений (I.7), убеждаемся, что пары $\mathcal{L}$ существуют и определяются с произволом одиннадцати функций двух аргументов.

Обозначая буквой δ дифференцирование по вторичным параметрам и буквами π_α^β значения форм ω_α^β при фиксированных первичных параметрах, из замыканий уравнений (I.7) находим:

$$\delta\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{41}(\pi_3^3 - \pi_1^1) - \Gamma_3^{42}\pi_2^1, \qquad (1.8)$$

$$\delta\Gamma_3^{42} = \Gamma_3^{42}(\pi_3^3 - \pi_2^2) + \pi_3^2. \qquad (1.9)$$

Исключая случай совпадения поверхности (A_3) с огибающей поверхностью плоскостей коник C_2, можно осуществить следующую фиксацию репера R:

$$\Gamma_3^{42} = 0, \quad \Gamma_3^{41} \neq 0, \qquad (1.10)$$

$$\Gamma_3^{41} = 1, \quad p = q = 1. \qquad (1.11)$$

Тогда

$$\pi_3^2 = 0, \quad \pi_3^3 - \pi_1^1 = 0. \qquad (1.12)$$

Условие (I.10) геометрически характеризуется тем, что прямая A_1A_3 содержит характеристическую точку плоскости коники C_2. Система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ в построенном каноническом репере приводится к виду:

$$\omega_i^j = \Gamma_{i\cdot}^{j\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^4 = \omega_1, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3\kappa}\omega_\kappa,$$

$$\omega_4^i = \Gamma_4^{i\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{i\kappa}\omega_\kappa, \quad \omega_1^1 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 = a^\kappa\omega_\kappa, \qquad (1.13)$$

$$\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2 = b^\kappa\omega_\kappa, \quad \omega_3^3 - \omega_1^1 = c^\kappa\omega_\kappa,$$

причем

$$c^2 + \Gamma_3^{12} - \Gamma_3^{21} + \Gamma_1^{21} - \Gamma_1^{32} = 0. \qquad (1.14)$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. С парой $\mathcal{L}$ ассоциируются следующие основные геометрические образы.

I. Прямолинейные конгруэнции $(A_1A_2), (A_2A_3), (A_2A_4)$.

1/ Конгруэнция (A_1A_2).

Фокусы $F = sA_1 + tA_2$ луча A_1A_2 и торсы конгруэнции (A_1A_2) определяются уравнениями:

$$t^2\Gamma_2^{31} + st(\Gamma_1^{31} - \Gamma_2^{32}) - s^2\Gamma_1^{32} = 0, \tag{1.15}$$

$$\omega_1^3\omega_2 - \omega_2^3\omega_1 = 0 \tag{1.16}$$

2/ Конгруэнция (A_2A_3).

Фокусы $F' = \rho A_2 + \tau A_3$ луча A_2A_3 и торсы этой конгруэнции определяются уравнениями:

$$\rho^2\Gamma_2^{11} + \rho\tau(\Gamma_3^{11} - \Gamma_2^{12}) - \tau^2\Gamma_3^{12} = 0, \tag{1.17}$$

$$\omega_2\omega_3^1 - \omega_2^1\omega_1 = 0. \tag{1.18}$$

3/ Конгруэнция (A_2A_4).

Для определения фокусов $F'' = \nu A_2 + \varrho A_4$ луча A_2A_4 и торсов конгруэнции (A_2A_4) имеем уравнения:

$$\nu^2(\Gamma_2^{11}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_2^{12}) + \nu\varrho(\Gamma_2^{11}\Gamma_4^{32} + \Gamma_4^{11}\Gamma_2^{32} - \Gamma_2^{31}\Gamma_4^{12} - \Gamma_4^{31}\Gamma_2^{12}) + \varrho^2(\Gamma_4^{11}\Gamma_4^{32} - \Gamma_4^{31}\Gamma_4^{12}) = 0, \tag{1.19}$$

$$\omega_2^1\omega_4^3 - \omega_4^1\omega_2^3 = 0. \tag{1.20}$$

II. Ассоциированные конгруэнции квадрик.

Рассмотрим пучок квадрик, которым принадлежат все коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2). Уравнение этого пучка можно записать в следующем виде:

$$Q_\lambda \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^4 - 2x^1x^3 + 2\lambda x^3x^4 = 0, \tag{1.21}$$

где λ – параметр пучка.

Из пучка квадрик Q_λ выделим одну квадрику, описывающую конгруэнцию, такую, что касательная плоскость к ней в точке A_4 проходит через характеристическую точку $M_o = A_3 - A_1$ плоскости коники C_2. При этом $\lambda = -1$. Будем рассматривать одновременно с квадрикой Q_{-1} квадрику Q_1, у которой касательная плоскость в точке A_4 проходит через четвертую гармоническую к точке M_o относительно точек A_3 и A_1.

Уравнение квадрики Q_ε $(\varepsilon^2 = 1)$ в репере R будет иметь вид:

$$Q_\varepsilon \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^3 - 2x^1x^4 + 2\varepsilon x^3x^4 = 0. \tag{1.22}$$

Дифференцируя уравнение (I.22) с помощью уравнений стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha \quad (\mathcal{D}\theta = 0)\ [1], \tag{1.23}$$

получим:

$$dQ_\varepsilon = 2(\theta - \omega_2^2)Q_\varepsilon + F_1\omega_1 + F_2\omega_2,$$

Фокальные точки квадрики Q_ε определяются из системы уравнений

$$Q_\varepsilon = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \tag{1.24}$$

где

$$\tfrac{1}{2}F_1 = x^1x^3(b^1 + 1 - \varepsilon) + x^1x^4(a^1 - \varepsilon\Gamma_1^{31} + \Gamma_4^{31}) + x^3x^4[\Gamma_4^{11} + \Gamma_3^{11} - \varepsilon(a^1 + c^1)] + x^1x^2(\Gamma_2^{31} - \Gamma_1^{21}) +$$

$$+x^2x^3(\Gamma_2^{11}-\Gamma_3^{21})+x^2x^4(\Gamma_2^{11}-\varepsilon\Gamma_2^{31}-\Gamma_4^{21})+ \tag{1.25}$$

$$+(x^3)^2(\Gamma_3^{11}-\varepsilon)+(x^4)^2(\Gamma_4^{11}-\varepsilon\Gamma_4^{31})+(x^1)^2(\Gamma_1^{31}+1);$$

$$\tfrac{1}{2}F_2=x^1x^3b^2+x^1x^4(a^2-\varepsilon\Gamma_1^{32}+\Gamma_4^{32})+x^3x^4[\Gamma_4^{12}+\Gamma_3^{12}-$$

$$-\varepsilon(a^2+c^2)]+x^1x^2(\Gamma_2^{32}-\Gamma_1^{22}+1)+x^2x^3(\Gamma_2^{12}-\Gamma_3^{22}-\varepsilon)+$$

$$+x^2x^4(\Gamma_2^{12}-\varepsilon\Gamma_2^{32}-\Gamma_4^{22})+(x^3)^2\Gamma_3^{12}+(x^4)^2(\Gamma_4^{12}-\varepsilon\Gamma_4^{32})+$$

$$+(x^1)^2\Gamma_1^{32} \tag{1.26}$$

При пересечении квадрики Q_ε координатными плоскостями $x^1=0$, $x^2=0$ возникают ассоциированные конгруэнции коник:

$$\Phi_\varepsilon:\quad (x^2)^2+2\varepsilon x^3x^4=0,\quad x^1=0, \tag{1.27}$$

$$\Psi_\varepsilon:\quad x^1x^3+x^1x^4-\varepsilon x^3x^4=0,\quad x^2=0 \tag{1.28}$$

Точка A_2 является полюсом прямой A_3A_4 относительно коники Φ_ε, точки A_1, A_3, A_4 инцидентны конике Ψ_ε.

Т е о р е м а. Если точки A_1, A_3 и A_4 -фокальные точки квадрики Q_ε, то: I/поверхность (A_1) является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1, C_2 и Ψ_ε, 2/точка A_3 будет фокальной точкой коник $C_2, \Phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$, 3/геометрическое место точек A_4 является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1, Φ_ε и Ψ_ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Из (I.24) следует, что точка A_1 будет фокальной точкой квадрики Q_ε, если выполняются условия

$$\Gamma_1^{31}+1=0,\quad \Gamma_1^{32}=0 \tag{1.29}$$

Поверхность (A_1) является фокальной поверхностью конгруэнций коник C_1 и C_2, если

$$\Gamma_1^{32}=0. \tag{1.30}$$

Для того, чтобы точка A_1 была фокальной точкой коники Ψ_ε, должно выполняться равенство:

$$\Gamma_1^{21}\Gamma_1^{32}-\Gamma_1^{22}(\Gamma_1^{31}+1)=0. \tag{1.31}$$

При условиях (I.29) равенства (I.30) и (I.31) тождественно удовлетворяются, откуда непосредственно следует первое утверждение теоремы.

Справедливость утверждений 2/ и 3/ устанавливается аналогично.

III. Ассоциированная конгруэнция конусов.

Для того, чтобы выделить из пучка Q_λ еще одну квадрику, которая описывает конгруэнцию, потребуем, чтобы точки A_3 и A_4 были полярно сопряжены относительно этой квадрики. Тогда $\lambda=0$. Уравнение квадрики Q_0 запишется в виде:

$$Q_0\equiv(x^2)^2-2x^1x^4-2x^1x^3=0 \tag{1.32}$$

Квадрика Q_0 является конусом с вершиной в точке $E^*=A_3-A_4$. Фокальные поверхности конгруэнции конусов Q_0 определяются системой уравнений

$$Q_0=0,\quad f_1=0,\quad f_2=0, \tag{1.33}$$

где

$$f_1=x^2x^3(\Gamma_2^{11}-\Gamma_3^{21})+x^2x^4(\Gamma_2^{11}-\Gamma_4^{21})+(x^1)^2(\Gamma_1^{31}+1)+$$

$$+x^1x^3(1+b^1)+x^1x^4(\Gamma_4^{31}+a^1)+x^3x^4(\Gamma_3^{11}+\Gamma_4^{11})+$$

$$+(x^3)^2\Gamma_3^{11}+(x^4)^2\Gamma_4^{11}+x^1x^2(\Gamma_2^{31}-\Gamma_1^{21}),$$

$$f_2=x^2x^3(\Gamma_2^{12}-\Gamma_3^{22})+x^2x^4(\Gamma_2^{12}-\Gamma_4^{22})+(x^1)^2\Gamma_1^{32}+$$

$$+x^1x^3b^2+x^1x^4(\Gamma_4^{32}+a^2)+x^3x^4(\Gamma_3^{12}+\Gamma_4^{12})+$$

$$+(x^3)^2\Gamma_3^{12}+(x^4)^2\Gamma_4^{12}+x^1x^2(1-\Gamma_1^{22}+\Gamma_2^{32}).$$

§2. Пары $\mathcal{L}^Q$ конгруэнций коник, принадлежащих одной квадрике.

Потребуем, чтобы все коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) пары $\mathcal{L}$ принадлежали некоторой инвариантной квадрике Q, уравнение которой в общем случае может быть записано в виде:

$$Q \equiv (x^2)^2 - 2x^1x^3 - 2x^1x^4 + 2a\,x^3x^4 = 0 \qquad (2.1)$$

Пары $\mathcal{L}$, у которых все коники C_1, C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) инцидентны инвариантной квадрике Q, назовем парами $\mathcal{L}^Q$.

Из условия

$$dQ = 2(\Theta - \omega_2^2)\,Q \qquad (2.2)$$

инвариантности квадрики Q следует, что на главные формы пары $\mathcal{L}$ и на функцию a накладываются следующие связи:

$$\begin{gathered} \omega_1^3 + \omega_1 = 0, \quad \omega_3^1 - a\,\omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^1 - a\,\omega_4^3 = 0, \\ \omega_2 + \omega_2^3 - \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 - \omega_3^2 - a\,\omega_2 = 0, \qquad (2.3) \\ 2\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_1^1 + a\,\omega_1^3 - \omega_4^3 = 0, \quad \omega_2^1 - \omega_4^2 - a\,\omega_2^3 = 0, \\ 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_3^4 + a\,\omega_1 = 0, \\ da + a\,(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^1 + \omega_3^1 = 0. \end{gathered}$$

Таким образом, пары $\mathcal{L}^Q$ будут удовлетворять следующей системе пфаффовых уравнений

$$\begin{gathered} \omega_1^3 = -\omega_1, \quad \omega_3^1 = a\,\omega_3^4, \quad \omega_4^1 = a\,\omega_4^3, \quad \omega_1^2 = \omega_2^3 + \omega_2, \\ \omega_3^2 = \omega_2^1 - a\,\omega_2, \quad \omega_4^2 = \omega_2^1 - a\,\omega_2^3, \quad \omega_2^1 = \Gamma_2^{1k}\omega_k, \qquad (2.4) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \omega_2^3 = \Gamma_2^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^4 = \omega_1, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\ 2\omega_2^2 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \omega_4^3 + a\,\omega_1, \quad 2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 = \omega_3^4 - a\,\omega_1, \\ \omega_3^3 - \omega_1^1 = c^k\omega_k, \quad da + a\,(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^1 + \omega_3^1 = 0, \end{gathered}$$

причем

$$c^2 + \Gamma_2^{31} - \Gamma_2^{11} = 0 \qquad (2.5)$$

Осуществляя замыкание и продолжение системы уравнений (2.4), (2.5), убеждаемся, что пары $\mathcal{L}^Q$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Отметим, что система уравнений (2.3) - вполне интегрируемая.

Т е о р е м а 2. Пары $\mathcal{L}^Q$ обладают следующими свойствами: 1/ плоскость $A_1A_3A_4$ является полярой точки A_2 относительно квадрики Q; 2/ точки A_1, A_3, A_4 являются фокусами лучей A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4 прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_2A_3)$ и (A_2A_4) соответственно; 3/ одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_2A_3)$ соответствует координатным линиям $\omega_1 = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Поляра точки A_2 относительно квадрики Q определяется уравнением

$$x^2 = 0.$$

2/ фокусы лучей A_1A_2, A_2A_3 и A_2A_4 прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2), (A_2A_3)$ и (A_2A_4) определяются формулами:

$$t\,[t\,\Gamma_2^{31} - s\,(1 + \Gamma_2^{32})] = 0, \qquad (2.6)$$

$$p\,[p\,\Gamma_2^{11} + r\,(a - \Gamma_2^{12})] = 0. \qquad (2.7)$$

$$\nu\{\gamma(\Gamma^{11}_{2}\Gamma^{32}_{2} - \Gamma^{31}_{2}\Gamma^{12}_{2}) + \varrho[\Gamma^{31}_{4}(a\Gamma^{32}_{2} - \Gamma^{12}_{2}) + \Gamma^{32}_{4}(\Gamma^{11}_{2} - a\Gamma^{31}_{2})]\} = 0. \qquad (2.8)$$

Из (I.I5),(2.6);(I.I7),(2.7);(I.I9) и (2.8) непосредственно следует, что точки A_1, A_3, A_4 являются соответственно фокусами лучей A_1A_2, A_2A_3, A_2A_4 прямолинейных конгруэнций. 3/Из уравнений (I.I6),(I.I8) и (2.4) находим, что торсы указанных конгруэнций определяются формулами:

$$\omega_1 \omega^2_1 = 0,$$

$$\omega_1 (a\omega_2 - \omega^1_2) = 0,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Так как все коники конгруэнций (C_1) и (C_2) принадлежат одной квадрике Q, то любая точка коник C_1 и C_2 является фокальной [2].

Список литературы.

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-"Труды Моск.матем.о-ва", I953, т.2, с.273-383 (М., ГИТТЛ).

2. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами.-"Труды Томского ун-та, " I960, т.I60, с.5-I4.

Ф.А. Л и п а т о в а

ВЫРОЖДЕННАЯ КОНГРУЭНЦИЯ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ, ИНЦИДЕНТНОЙ ЭЛЛИПСУ

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуется класс вырожденных конгруэнций T пар фигур, образованных эллипсом C и точкой M, инцидентной эллипсу C, где точка M описывает линию.

Отнесем конгруэнцию T к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где A – центр эллипса, вектор $\bar{e}_1 = \overline{AM}$, вектор $\bar{e}_2 = \overline{AA_2}$ сопряжен вектору $\bar{e}_1$ относительно эллипса C, точка A_2 инцидентна этому эллипсу, вектор $\bar{e}_3$ коллинеарен касательной к линии, описываемой точкой M в точке M.

Из рассмотрения исключается случай, при котором касательная коллинеарна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

Эллипс C относительно репера R определяется уравнениями

$$(x^1)^2 + (x^2_2)^2 = 1, \qquad (1.1)$$
$$x^3 = 0.$$