т.9,М.,1979,с.5-246.

2.Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур .Вып.8,Калининград,1977,с.135-150.

3.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства.-В кн.:Труды 4-го Всес.матем. съезда,т.2,Л.,1964,с.226-233.

4.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.,"Наука",1976.

5.О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.- В кн.:Труды геом. семинара.Т.I,М.,1966,с.239-263.

6.Cartan E. Les espaces a connexion projective.- В кн.:Труды семин.по векторн. и тензорн. анализу.Вып.4. М.-Л.,1937,с.147-159.

7.Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности.-В кн.:Дифференц.геометрия многообразий фигур.Вып.10,Калининград,1979,с.154-158.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. I2 1981

А. М. Ш е л е х о в, Е. И. Б у р ч,

Л. Е. Е в д о к и м о в а, М. Е. С н е т к о в а

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ БЕЛЬТРАМИ

Известно следующее предложение, принадлежащее Е.Бельтрами. Пусть V - развертывающаяся поверхность, образованная касательными гладкой пространственной кривой ℓ, π_o - соприкасающаяся плоскость этой кривой в некоторой точке $M_o \in \ell$ и ℓ' - линия пересечения плоскости π_o с поверхностью V. Тогда имеет место равенство $k'=\frac{3}{4}k$, где k и k', соответственно, кривизны линий ℓ и ℓ' в их общей точке M_o. Мы обобщаем это соотношение для случая, когда ℓ - кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности n и $\ell' \equiv \ell^m$ - кривая, высекаемая соприкасающимися $(n-m)$- плоскостями кривой ℓ в некоторой ее фиксированной соприкасающейся m -плоскости. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. p- е кривизны k_p и k_p^m кривых ℓ и ℓ^m в их общей точке связаны соотношением

$$k_p^m = \frac{n}{n-p}\cdot\frac{m-p}{m}\,k_p. \qquad (1)$$

Формула Бельтрами получается отсюда при $n=3$, $m=2$, $p=1$.

I. Предварительно выведем формулы для вычисления кривизн гладкой параметризованной кривой в $\mathbb{R}^n$, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы.

Формулы Френе для кривой ℓ, заданной уравнением $\bar{\tau} = \bar{\tau}(s)$, где s - натуральный параметр, имеют следующий вид (см. [1]):

$$\frac{d\bar e_1(s)}{ds} = \kappa_1(s)\,\bar e_2(s),$$

$$\frac{d\bar e_2(s)}{ds} = -\kappa_1(s)\,\bar e_1(s) + \kappa_2(s)\,\bar e_3(s), \qquad (2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d\bar e_n(s)}{ds} = -\kappa_{n-1}(s)\,\bar e_{n-1}(s).$$

Здесь $\kappa_1(s),\dots,\kappa_{n-1}(s)$ – кривизны кривой ℓ, $\{\bar e_1(s),\dots,\bar e_n(s)\}$ – семейство адаптированных ортонормированных реперов, так что $\bar e_1 = d\bar r/ds$ и соприкасающаяся p-плоскость кривой ℓ в точке $M(s)\in\ell$ определяется векторами $\bar e_1(s),\dots,\bar e_p(s)$.

Пусть $\bar r(s(t))$ – радиус-вектор кривой ℓ, отнесенной к произвольному параметру t. Дифференцируя по t и используя формулы (2), получим:

$$\frac{d\bar r}{dt} = \bar r' = \bar e_1\frac{ds}{dt} = s'\bar e_1,$$

$$\bar r'' = \frac{d^2 s}{dt^2}\bar e_1 + \kappa_1(s')^2\bar e_2, \qquad (3)$$

$$\bar r''' = (\dots)\bar e_1 + (\dots)\bar e_2 + \kappa_1\kappa_2(s')^3\bar e_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\bar r^{(n)} = (\dots)\bar e_1 + \dots + \kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{n-1}(s')^n\,\bar e_n.$$

Обозначим через $W(x_1,\dots,x_p)$ определитель Грама системы векторов $x_1,\dots,x_p$. Используя равенства (3) и свойства определителя Грама, находим, что

$$W(\bar r',\dots,\bar r^{(p)}) = W(s'\bar e_1, \kappa_1(s')^2\bar e_2,\dots,\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{n-1}(s')^p\bar e_p) =$$

$$= (s')^{n(n+1)}(\kappa_1^{p-1}\kappa_2^{p-2}\cdot\ldots\cdot\kappa_{p-1})^2\, W(\bar e_1,\bar e_2,\dots,\bar e_p).$$

Но $W(\bar e_1,\dots,\bar e_p)=1$, поэтому

$$W(\bar r',\dots,\bar r^{(p)}) = (s')^{n(n+1)}(\kappa_1^{p-1}\kappa_2^{p-2}\cdot\ldots\cdot\kappa_{p-1})^2.$$

С помощью этих соотношений легко найти кривизны кривой ℓ. После несложных вычислений получим:

$$\kappa_p = \frac{1}{|\bar r'|}\,W^{-1}(\bar r',\dots,\bar r^{(p)})\,W^{\frac12}(\bar r',\dots,\bar r^{(p-1)})\,W^{\frac12}(\bar r',\dots,\bar r^{(p+1)}). \qquad (4)$$

Здесь и далее мы предполагаем, что в рассматриваемых точках кривой ℓ выполняется условие $W(\bar r',\dots,\bar r^{(p)})\neq 0$, то есть при любом p векторы $\bar r',\dots,\bar r^{(p)}$ образуют линейно независимую систему. В таких точках все кривизны отличны от нуля, то есть эти точки не являются точками уплощения.

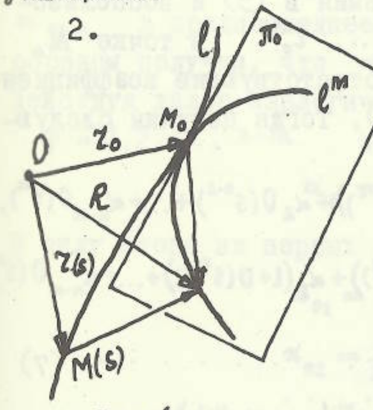

Рис.1

2. Пусть кривая ℓ отнесена к натуральному параметру s, $\bar r = \bar r(s)$ и $\bar r(0) = \overline{OM_0}$. Обозначим соприкасающуюся m-плоскость в точке M_0 через π_0 и пусть N – текущая точка определенной выше кривой ℓ^m. Тогда N есть пересечение плоскости π_0 с соприкасающейся $(n-m)$-плоскостью $\pi(s)$ кривой ℓ в точке $M(s)$. Так как вектор $\overline{MN}$ лежит в плоскости $\pi(s)$ (см. рис.1), то $\overline{MN} = \alpha_1\bar r' + \alpha_2\bar r'' + \dots + \alpha_{n-m}\bar r^{(n-m)}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-m}$ есть функции параметра s. Поэтому радиус-вектор $\bar R$ кривой ℓ имеет вид:

$$\bar R(s) = \bar r(s) + \alpha_1\bar r' + \alpha_2\bar r'' + \dots + \alpha_{n-m}\bar r^{(n-m)}. \qquad (5)$$

С другой стороны, так как вектор $\overline{M_0N}$ лежит в плоскости π_0, то вектор $\bar{R}(s)$ можно выразить следующим образом:

$$\bar{R}(s)=\bar{\tau}_0+\alpha_{01}\bar{\tau}_0'+\ldots+\alpha_{0m}\bar{\tau}_0^{(m)}, \qquad (6)$$

где $\bar{\tau}_0',\ldots,\bar{\tau}_0^{(m)}$ – значения производных вектора $\bar{\tau}$ в точке $s=0$.

Наша ближайшая задача – найти разложение в ряд Тейлора вектора $\bar{R}(s)$ в окрестности точки M_0, причем нам понадобятся лишь первые члены разложений функций α_{01}, $\ldots$, α_{0m}. Будем считать, что точка $M(s)$ достаточно близка к M_0, и разложим в ряд Тейлора функции $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}',\ldots,\bar{\tau}^{(n)}$:

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}_0+s\bar{\tau}_0'+\frac{1}{2}s^2\bar{\tau}_0''+\frac{1}{3}s^3\bar{\tau}_0'''+\ldots,$$

$$\bar{\tau}'=\bar{\tau}_0'+s\bar{\tau}_0''+\frac{1}{2}s^2\bar{\tau}_0'''+\ldots$$

и так далее. Подставим эти разложения в (5) и воспользовавшись тем, что производные $\bar{\tau}_0',\ldots,\bar{\tau}_0^{(n)}$ в точке M_0 линейно независимы, приравняем соответствующие коэффициенты при них в разложениях (5) и (6). Тогда получим следующие соотношения:

$$\alpha_{01}=s+O(s^n)+\alpha_1\left(1+O(s^{n-1})\right)+\alpha_2 O(s^{n-2})+\ldots+\alpha_{n-m}O(s^m),$$

$$\alpha_{02}=\frac{1}{2}s^2+O(s^n)+\alpha_1\left(s+O(s^{n-1})\right)+\alpha_2\left(1+O(s^{n-2})\right)+\ldots+\alpha_{n-m}O(s^m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$

$$\alpha_{0m}=\frac{1}{m!}s^m+O(s^n)+\alpha_1\left(\frac{1}{(m-1)!}s^{m-1}+O(s^{n-1})\right)+$$

$$+\alpha_2\left(\frac{1}{(m-2)!}s^{m-2}+O(s^{n-2})\right)+\ldots+\alpha_k\left(\frac{1}{(m-k)!}s^{m-k}+O(s^{n-k})\right),$$

$$0=\frac{1}{(m+1)!}s^{m+1}+O(s^n)+\alpha_1\left(\frac{1}{m!}s^m+O(s^{n-1})\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{(m-1)!}s^{m-1}+O(s^{n-2})\right)+$$

$$+\ldots+\alpha_{k_1}\left(\frac{1}{(m-k_1+1)!}s^{m-k_1+1}+O(s^{n-k_1})\right),$$

$$0=\frac{1}{n!}+O(s^n)+\alpha_1\left(\frac{1}{(n-1)!}s^{n-1}+O(s^{n-1})\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{(n-2)!}s^{n-2}+O(s^{n-2})\right)+$$

$$+\ldots+\alpha_{n-m}\left(\frac{1}{m!}s^m+O(s^m)\right),$$

где $k=\min(m,n-m)$, $k_1=\min(m+1,n-m)$ и т.д., и остаток $O(s^q)$ имеет порядок малости относительно s не ниже $q+1$.

Покажем, что из соотношений (7) мы сможем найти интересующие нас разложения функций $\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0m}$. В самом деле, пусть $\alpha_{n-m}=\alpha_{n-m0}+\alpha_{n-m1}s+\alpha_{n-m2}s^2+\ldots+A_{n-m}s^{n-m}+\ldots$. Подставляя это разложение в последнее уравнение системы (7), легко найдем, что $\alpha_{n-m0}=\alpha_{n-m1}=\ldots=\alpha_{n-m\,n-m-1}=0$, так что $\alpha_{n-m}=A_{n-m}s^{n-m}+\ldots$ Подставляя это выражение для α_{n-m} в предпоследнее уравнение системы (7), таким же образом получим, что $\alpha_{n-m-1}=A_{n-m-1}s^{n-m-1}+\ldots$ Действуя далее аналогичным способом, найдем, что для $p=1,2,\ldots,n-m$ искомые разложения имеют вид

$$\alpha_p=A_p s^p+\ldots \qquad (8)$$

В силу этого из первых m уравнений системы (7) имеем

$$\alpha_{01}=s+\alpha_1+O(s),$$

$$\alpha_{02}=\frac{1}{2}s^2+\alpha_1 s+\alpha_2+O(s^2), \qquad (9)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{0m}=\frac{1}{m!}+\alpha_1\frac{s^{m-1}}{(m-1)!}+\ldots+\alpha_k\frac{s^{m-k}}{(m-k)!},$$

где $k=\min(m,n-m)$.

3. Итак, для определения величин A_p, входящих в разложения (8), получаем, согласно проведенным выше рассуждениям, из последних $(n-m)$ уравнений (7) такую сис-

тему:

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}A_1+\frac{1}{(n-2)!}A_2+\ldots+\frac{1}{m!}A_{n-m}=0,$$

$$\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}A_1+\frac{1}{(n-3)!}A_2+\ldots+\frac{1}{(m-1)!}A_{n-m}=0, \qquad (10)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{m!}A_1+\frac{1}{(m-1)!}+\ldots+\frac{1}{(2m-n+1)!}A_{n-m}=0.$$

(Мы предположили для определенности, что $m \geqslant n-m$, т.е. $2m-n \geqslant 0$).

Умножим p - е уравнение системы (10) на $\frac{n!}{(p-1)!}$ и обозначим

$$\bar{A}_p = A_p\frac{n!}{(n-p)!}, \quad (0!=1). \qquad (11)$$

Тогда система (10) перепишется следующим образом

$$1+\bar{A}_1+\bar{A}_2+\ldots+\bar{A}_{n-m}=0,$$

$$C_n^1+C_{n-1}^1\bar{A}_1+C_{n-2}^1\bar{A}_2+\ldots+C_m^1\bar{A}_{n-m}=0, \qquad (12)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n^{n-m+1}+C_{n-1}^{n-m-1}\bar{A}_1+C_{n-2}^{n-m+1}\bar{A}_2+\ldots+C_m^{n-m-1}\bar{A}_{n-m}.$$

Л е м м а. Решение системы (12) имеет вид

$$\bar{A}_p = (-1)^p\, C_{n-m}^p \qquad (13)$$

Рассмотрим определитель системы (I2)

$$\Delta(n-m)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ C_{n-1}^1 & C_{n-2}^1 & \ldots & C_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-1}^{n-m-1} & C_{n-2}^{n-m-1} & \ldots & C_m^{n-m-1} \end{vmatrix}$$

Вычитая из каждого столбца последующий и пользуясь тождеством

$$C_q^p - C_{q-1}^p = C_{q-1}^{p-1}, \qquad (14)$$

преобразуем определитель $\Delta(n-m)$ к виду:

$$\Delta(n-m)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & C_m^1 \\ C_{n-2}^1 & C_{n-3}^1 & \ldots & C_m^1 & C_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n-2}^{n-m-2} & C_{n-3}^{n-m-2} & \ldots & C_m^{n-m-2} & C_m^{n-m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-m-1}\,\Delta(n-m-1),$$

причем через $\Delta(n-m-1)$ мы обозначили определитель, получающийся из $\Delta(n-m)$ заменой $n \to n-1$.

Используя найденное рекуррентное соотношение, а также очевидное равенство $\Delta(1)=1$, легко находим, что

$$\Delta(n-m)=(-1)^s, \qquad s=\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1). \qquad (15)$$

Обозначим далее через $\Delta_{\hat{p}}(n-m)$, $\hat{p}=0,1,\ldots,n-m$, миноры матрицы, составленной из коэффициентов системы (I2), а именно, положим

$$\Delta_{\hat{p}}(n-m)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ C_n^1 & C_{n-1}^1 & \ldots & C_{n-p+1}^1 & C_{n-p-1}^1 & \ldots & C_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^{n-m-1} & C_{n-1}^{n-m-1} & \ldots & C_{n-p+1}^{n-m-1} & C_{n-p-1}^{n-m-1} & \ldots & C_m^{n-m-1} \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

При этом $\Delta_0(n-m)=\Delta(n-m)$, а $\Delta_{n-m}(n-m)$ получается из $\Delta(n-m)$ заменой $n \to n+1$, $m \to m+1$ и поэтому, согласно (15), $\Delta_{n-m}(n-m)=(-1)^s$.

Преобразуем определитель (16), вычитая из каждого столбца последующий. Используя тождество (14), а также легко получаемое из него тождество

$$C_q^p - C_{q-2}^p = C_{q-1}^{p-1} + C_{q-2}^{p-2},$$

преобразуем определитель $\Delta_{\hat p}(n-m)$ к виду:

$$\Delta_{\hat p}(n-m) = (-1)^{n-m-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1+1 & 1 & \dots & 1 \\ C_{n-1}^1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-\hat p+1}^1 & C_{n-\hat p}^1 + C_{n-\hat p-1}^1 & C_{n-\hat p-2}^1 & \dots & C_m^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1}^{n-m-2} & C_{n-2}^{n-m-2} & \dots & C_{n-\hat p+1}^{n-m-2} & C_{n-\hat p}^{n-m-2} + C_{n-\hat p-1}^{n-m-2} & C_{n-\hat p-2}^{n-m-2} & \dots & C_m^{n-m-2} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель представим в виде суммы двух определителей, первый из которых, ввиду обозначения (16), может быть записан как $\Delta_{\hat p}(n-m-1)$, а второй – как $\Delta_{n-1}(n-m-1)$. Отсюда получается следующее рекуррентное соотношение:

$$\Delta_p(n-m) = (-1)^{n-m-1}\left(\Delta_p(n-m-1) + \Delta_{p-1}(n-m-1)\right). \qquad (17)$$

Используя это тождество, вычислим последовательно определители

$$\Delta_1(n-m),\ \Delta_2(n-m),\ \dots,\ \Delta_p(n-m).$$

При $p=1$, принимая во внимание (15), а также, что $\Delta_0 = \Delta$, имеем:

$$\Delta_1(n-m) = (-1)^{n-m-1}\Delta_1(n-m-1) + (-1)^{n-m-1}\Delta(n-m-1) =$$

$$= (-1)^{n-m-1}\left((-1)^{n-m-2}\Delta_1(n-m-2) + (-1)^{n-m-2}\Delta(n-m-2)\right) + \Delta(n-m) =$$

$$= (-1)^{(n-m-1)+(n-m-2)}\Delta_1(n-m-2) + 2\Delta(n-m) = \dots =$$

$$= (-1)^{(n-m-1)+\dots+1}\Delta_1(1) + (n-m-1)\Delta(n-m).$$

Но $\Delta_1(1) = 1$, поэтому

$$\Delta_1(n-m) = (-1)^S + (n-m-1)(-1)^S = (n-m)(-1)^S,\quad S = \frac{1}{2}(n-m)(n-m-1). \quad (18)$$

Далее, поступая аналогичным образом, с помощью (17) получим:

$$\Delta_2(n-m) = (-1)^{(n-m-1)+\dots+2}\Delta_2(2) + (-1)^{(n-m-1)+\dots+2}\Delta_1(2) +$$

$$+ (-1)^{(n-m-1)+\dots+3}\Delta_1(3) + \dots + (-1)^{n-m-1}\Delta_1(n-m-1).$$

Так как $\Delta_2(2) = -1$, то в силу (18) имеем:

$$\Delta_2(n-m) = (-1)^S + 2(-1)^S + 3(-1)^S + \dots + (n-m-1)(-1)^S = (-1)^S C_{n-m}^2$$

Вычисляя $\Delta_p(n-m)$, мы придем к равенству:

$$\Delta_p(n-m) = (-1)^S\left(1 + C_p^{p-1} + C_{p+1}^{p-1} + \dots + C_{n-m-1}^{p-1}\right).$$

Индукцией легко доказывается, что выражение в скобках равно C_{n-m}^p, поэтому $\Delta_p(n-m) = (-1)^S C_{n-m}^p$.

Формулы Крамера для системы (12) с учетом обозначений (16) имеют вид: $\bar A_p = (-1)^p \Delta_p(n-m) : \Delta(n-m)$. Подставляя сюда найденные значения $\Delta_p(n-m)$ и $\Delta(n-m)$, получим соотношения (13) $\lhd$.

Из формул (11) вследствие доказанной леммы находим, что

$$A_p = (-1)^p C_{n-m}^p \frac{(n-p)!}{n!}. \qquad (19)$$

4. Используя соотношения (8) и (19), вычислим величины α_{op}. Из (9) имеем:

$$\alpha_{o1} = S - C_{n-m}^1 \frac{S}{n} + O(S) = \frac{m}{n}S + O(S),$$

$$\alpha_{02} = \left(\frac{1}{2} + A_1 + A_2\right)s^2 + O(s^2) = \frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{n(n-1)}s^2 + O(s^2),$$

и т.д. Для произвольного p получим:

$$\alpha_{0p} = \frac{1}{p!}\frac{C_m^p}{C_n^p}s^p + O(s^p).$$

Поэтому, согласно формуле (16), радиус-вектор кривой ℓ^m примет вид:

$$\bar{R}(s) = \bar{\tau}_0 + \sum_{p=1}^{m}\left(\frac{1}{p!}\frac{C_m^p}{C_n^p}s^p + O(s^p)\right)\bar{\tau}_0^{(p)}. \qquad (20)$$

Найдем теперь, пользуясь формулой (4), p-ю кривизну k_p^m кривой ℓ^m в точке M_0. Для этого вычислим производные $\bar{R}'(0)$, $\bar{R}''(0)$ и т.д. Из (20) имеем:

$$\bar{R}'(0) = B_1\bar{\tau}_0', \ \bar{R}''(0) = B_2\bar{\tau}_0'', \ \ldots, \ \bar{R}^{(p)}(0) = B_p\bar{\tau}_0^{(p)}, \qquad (21)$$

где $B_p = C_m^p : C_n^p$. Подставляя значения производных в формулу (4), получим:

$$k_p^m = |B_1\bar{\tau}_0'|^{-1} W^{-1}(B_1\bar{\tau}_0', \ldots, B_p\bar{\tau}_0^{(p)}) W^{\frac{1}{2}}(B_1\bar{\tau}_0', \ldots, B_{p-1}\bar{\tau}_0^{(p-1)}) \times$$

$$\times W^{\frac{1}{2}}(B_1\bar{\tau}_0', \ldots, B_{p+1}\bar{\tau}_0^{(p+1)}) = (B_1)^{-1}(B_1 \cdot \ldots \cdot B_p)^{2}(B_1 \cdot \ldots \cdot B_{p-1})(B_1 \cdot \ldots B_{p+1}) \times$$

$$\times \frac{1}{|\bar{\tau}_0'|} W^{-1}(\bar{\tau}_0', \ldots, \bar{\tau}_0^{(p)}) W^{\frac{1}{2}}(\bar{\tau}_0', \ldots, \bar{\tau}_0^{(p-1)}),$$

где k_p - кривизна кривой ℓ в точке M_0. Если подставить сюда вместо B_1, B_p, B_{p+1} их значения, найденные выше, то придем к соотношению (1), и теорема, таким образом, доказана.

5. Выясним геометрический смысл формул (1). Для этого запишем их в следующем виде:

$$\frac{k_p^m}{1-\frac{p}{m}} = \frac{k_p}{1-\frac{p}{n}}. \qquad (1')$$

Так как здесь m может принимать значения $2, 3, \ldots, n-1$, то мы приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а. Пусть точка M гладкой параметризованной кривой $\ell \subset \mathbb{R}^n$ не является точкой уплощения и ℓ^m $(m = 2, 3, \ldots, n)$ – линии, высекаемые в соприкасающихся m-плоскостях кривой ℓ, взятых в точке M, соприкасающимися плоскостями дополнительной размерности (при этом мы считаем, что $\ell^n = \ell$). Тогда величина

$$\mathcal{K}_p = \frac{k_p^m}{1-\frac{p}{m}},$$

где k_p^m — p-я кривизна кривой ℓ^m в точке M, не зависит от m, то есть будет одна и та же для всех указанных кривых.

Полученный результат можно сформулировать в других терминах. Обозначим через V^a $(a = 1, 2, \ldots, n-1)$ поверхность размерности a, образованную соприкасающимися $(a-1)$-плоскостями кривой ℓ. Эти поверхности являются тангенциально-вырожденными поверхностями ранга 1 (см. [2]), причем $V^1 = \ell \subset V^2 \subset \ldots \subset V^{n-1}$.

Пусть теперь $\pi^2 \subset \pi^3 \subset \ldots \subset \pi^n$ - соприкасающиеся плоскости кривой ℓ в некоторой ее точке M, где $\pi^n \equiv \mathbb{R}^n$. Тогда кривые ℓ^m, определенные выше, можно рассматривать как пересечения: $\ell^m = V^{n-m+1} \cap \pi^m$.

Список литературы

1. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Многомерные пространства. М., Наука, 1966.
2. А к и в и с М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, КГУ, 1977.