3. *Жовтенко О.М.* Объект кривизны связности, ассоциированной с семейством плоскостей // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2002. С. 81 – 86.

4. *Близникас В.И.* О некоторых связностях расслоенных пространств // Литов. мат. сб. 1967. Т. 7. N 1. С. 5 – 16.

Yu. Shevchenko

GEOMETRICAL CONNECTION OF A SET OF PLANES GENERATED BY A PROJECTIVE CONNECTION

In many-dimensional projective space the arbitrary set of planes of any dimensions is considered. With this set are associated a bundle of Yu. Lumiste and a bundle of projective frames, in which are given accordingly geometrical and projective connections. It is proved, that the projective connection generates geometrical connection.

УДК 514.75

Е.П. Юрова
(Калининградский государственный университет)

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С КРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции V эллипсоидов Q с невырождающимися поверхностями S центров. Доказано, что точки пересечения с эллипсоидом Q диаметра, сопряженного касательной плоскости к S относительно Q, могут быть фокальными только попарно. Исследованы подклассы конгруэнций V с кратными фокальными поверхностями и с фокальной поверхностью, описанной фокальными точками второго порядка. Установлен характеристический признак таких фокальных поверхностей.

§1. Поверхности и прямолинейные конгруэнции,

ассоциированные с конгруэнцией эллипсоидов

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве конгруэнцию V эллипсоидов Q с невырождающейся поверхностью S, описанной центрами эллипсоидов. Отнесем конгруэнцию V к каноническому реперу $\{A, \vec{e}_\alpha\}$ (α, β, γ=1, 2, 3), где A – центр эллипсоида Q, $\vec{e}_3$ направлен по прямой, сопряженной касательной плоскости к поверхности S в точке A, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – по касательным к линиям, высекаемым на поверхности S торсами прямолинейной конгруэнции ($A\vec{e}_3$), причем концы A_α векторов $\vec{e}_\alpha$ лежат на эллипсоиде Q. В репере $\{A, \vec{e}_\alpha\}$ уравнение эллипсоида Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции V запишутся, соответственно, в виде:

$$F(x^\alpha) \equiv (x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0; \qquad (1.1)$$

$$\omega^3 = 0, \omega_3^i = a_i\omega^i, \omega_i^3 = b_i\omega^i + b\omega^j, \omega_i^j = m_i\omega^j + m_{ij}\omega^j,$$
$$d\lambda = \lambda_k\omega^k,\ \omega_\alpha^\alpha = c_{\alpha k}\omega^k; \qquad (1.2)$$

$$a_1 - a_2 \neq 0. \qquad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем i, j, k=1, 2 (i≠j) и по индексам i, j, α суммирование не производится. Неравенство (1.3) исключает из рассмотрения конгруэнцию V с параболической ассоциированной прямолинейной конгруэнцией AA_3, так как для таких конгруэнций нельзя построить вышеуказанный канонический репер.

Система (1.2) – в инволюции и определяет конгруэнции V с произволом семи функций двух аргументов. Используя условия стационарности точки $M(x^\alpha)$

$$dx^\alpha = -x^\beta\omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha, \qquad (1.4)$$

находим:

$$-\frac{1}{2}dF = F_1\omega^1 + F_2\omega^2, \qquad (1.5)$$

$$
\begin{aligned}
F_i = (c_{ii} + \lambda m_i)(x^i)^2 + (c_{ji} + \lambda m_{ji})(x^j)^2 + c_{3i}(x^3)^2 + \\
+ x^3((a_i + b_i)x^i + (b + \lambda a_i)x^j) + \\
+ (m_i + m_{ji} + \lambda(c_{ii} + c_{ji}) - \lambda_i)x^i x^j + x^i + \lambda x^j.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Теорема 1. *Если точка $A_3(0,0,1)$ является фокальной точкой эллипсоида $Q \in V$, то и аффинно симметричная ей точка $A_3^*(0,0,-1)$ также является его фокальной точкой.*

Доказательство. Фокальные точки эллипсоида $Q \in V$ определяются системой алгебраических уравнений

$$F=0,\ F_1=0,\ F_2=0. \tag{1.7}$$

Подставляя в эти уравнения координаты точки A_3, получим:

$$c_{31}=0,\ c_{32}=0 \Leftrightarrow \omega_3^3 = 0. \tag{1.8}$$

Следовательно, точка $A_3^*(0, 0, -1)$ также является фокальной, так как ее координаты удовлетворяют системе (1.7).

Система (1.7) определяет в общем случае восемь фокальных точек эллипсоида $Q \in V$, каждая из которых описывает фокальное многообразие конгруэнции V (невырожденную или вырожденную поверхность). С конгруэнцией V ассоциируются также поверхности (A_α) и прямолинейные конгруэнции (AA_α), описанные ребрами канонического репера. Торсы и фокусы луча AA_α этих конгруэнций определяются формулами:

$$(AA_i):\ \omega^j(b_i\omega^i + b\omega^j) = 0,\ \vec{\Phi}_i = \vec{A} + \frac{b_i}{bm_i - b_i m_{ij}}\vec{e}_i; \tag{1.9}$$

$$(AA_3):\ \omega^1\omega^2 = 0,\ \vec{\Phi}_{3,i} = \vec{A} - \frac{1}{a_i}\vec{e}_3. \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что условие $b_i=0$ характеризует параболическую конгруэнцию (AA_i), условие $a_1+a_2=0$ – прямолинейную конгруэнцию (AA_3), имеющую S своей средней поверхностью, условие $b=0$ характеризует соответствие торсов всех трех прямолинейных конгруэнций (AA_α). Наконец, условие a_i=0 определяет конгруэнцию (AA_3) с одним семейством цилиндрических торсов.

§2. Конгруэнции V_0

Определение 2.1. Конгруэнцией V_0 называется конгруэнция V с фокальными поверхностями (A_α), (A_2), (A_3) и сопряженными относительно эллипсоида Q векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Теорема 2. *Конгруэнции V_0 существуют и определяются с произволом шести функций одного аргумента.*

Доказательство. Учитывая в уравнениях (1.7) условие λ=0 (сопряженности векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$) и требуя, чтобы координаты точек $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$ обращали эти уравнения в тождества, получим:

$$\omega_1^1 + \omega^1 = 0,\ \omega_2^2 + \omega^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0. \qquad (2.1)$$

Замыкая (2.1), получим:

$$b = 0,\ m_{12} = m_{21} \overset{\text{def}}{=} m,\ \ m_1 m_2 - m^2 - m = 0. \qquad (2.2)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции V_0 приводится к виду:

$$\omega^3 = 0,\ \omega_i^i + \omega^i = 0,\ \omega_3^i = a_i\omega^i,\ \omega_i^3 = b_i\omega^i,\ \omega_3^3 = 0,\ \ \omega_i^j = m_i\omega^i + m\omega^j. \ (2.3)$$

Эта система в инволюции, и ее общее решение зависит от шести произвольных функций одного аргумента.

Фокальные точки эллипсоида $Q \in V_0$ определяются системой уравнений:

$$\begin{gathered}(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0,\ x^1(1 - x^1 + (m_1 + m)x^2 + (a_1 + b_1)x^3) = 0,\\ x^2((m_2 + m)x^1 - x^2 + (a_2 + b_2)x^3) = 0.\end{gathered} \qquad (2.4)$$

Ее решениями являются точки $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $A_3^*(0, 0, -1)$, точки M_i:

$$\vec{M}_i = \vec{A}_i + \frac{1 - (a_i + b_i)^2}{(a_i + b_i)^2 + 1}\vec{e}_i - \frac{2(a_i + b_i)}{(a_i + b_i)^2 + 1}\vec{e}_3, \qquad (2.5)$$

а также две точки пересечения с эллипсоидом $Q \in V_0$ прямой

$$\begin{cases}(m_2+m)x^1 - x^2 + (a_2+b_2)x^3 + 1 = 0, \\ x^1 - (m_1+m)x^2 - (a_1+b_1)x^3 - 1 = 0,\end{cases} \qquad (2.6)$$

где

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} m_2+m & -1 & a_2+b_2 & 1 \\ 1 & -(m_1+m) & -(a_1+b_1) & -1 \end{pmatrix} = 2, \qquad (2.7)$$

так как в противном случае эллипсоид $Q \in V_0$ содержал бы фокальный эллипс (действительный или мнимый). Такие конгруэнции V_0 мы не рассматриваем.

Из (2.2) следует, что при

$$b_1 b_2 \neq 0 \qquad (2.8)$$

торсы прямолинейных конгруэнций (AA_α), ассоциированных с конгруэнцией V_0, соответствуют.

§3. Конгруэнции V_0 с двукратными фокальными многообразиями (A_1) и (A_2)

Определение 3.1. Конгруэнцией V_0^* называется конгруэнция V_0, фокальные точки A_1 и A_2 эллипсоидов Q которой двукратны.

Анализируя формулы (2.5) и (2.6), убеждаемся, что фокальные точки A_1 и A_2 являются двукратными, но не трехкратными только в следующих четырех случаях:

$$a_1+b_1=0,\ a_2+b_2=0,\ (m_1+m+1)(m_2+m+1)\neq 0; \qquad (3.1)$$

$$a_1+b_1=0,\ m_1+m+1=0,\ a_2+b_2\neq 0; \qquad (3.2)$$

$$a_2+b_2=0,\ m_2+m+1=0,\ a_1+b_1\neq 0; \qquad (3.3)$$

$$m_1+m+1=0,\ m_2+m+1=0,\ (a_1+b_1)(a_2+b_2)\neq 0. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим подробнее первый случай. Замыкая уравнения

$$\omega_3^1 + \omega_1^3 = 0,\ \ \omega_3^2 + \omega_2^3 = 0, \qquad (3.5)$$

получим соотношения

$$a_1(m_2+m)=0,\ a_2(m_1+m)=0. \qquad (3.6)$$

При $a_1a_2 \neq 0$ приходим к противоречию, так как, учитывая (2.2), получим $m=m_1=m_2=0$, а замыкая уравнение $\omega_1^2 = 0$, находим (в силу (3.1)) $a_1a_2\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, т. е. $a_1a_2=0$. Если же $a_1=0$, $a_2\neq 0$ или $a_1\neq 0$, $a_2=0$, то система пфаффовых уравнений (2.3) приводится, соответственно, к виду:

$$\begin{cases} \omega^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega^1 = 0,\ \omega_2^2 + \omega^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_1^3 = 0, \\ \omega_3^1 = 0,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0,\ \omega_3^2 = a_2\omega^2,\ \omega_2^1 = m_2\omega^2; \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \omega^3 = 0,\ \omega_1^1 + \omega^1 = 0,\ \omega_2^2 + \omega^2 = 0,\ \omega_3^3 = 0,\ \omega_2^3 = 0, \\ \omega_3^2 = 0,\ \omega_2^1 = 0,\ \ \omega_1^3 + \omega_3^1 = 0,\ \omega_3^1 = a_1\omega^1,\ \omega_1^2 = m_1\omega^1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Каждая из этих систем определяет подкласс конгруэнций V_0^* с произволом двух функций одного аргумента.

Пусть $a_1=0$, $a_2=0$, т. е.

$$\omega_1^3 = 0,\ \omega_2^3 = 0,\ \omega_3^1 = 0,\ \ \omega_3^2 = 0. \tag{3.9}$$

В этом случае замыкание системы уравнений Пфаффа (2.3), (3.5), (3.9) имеет вид:

$$\begin{cases} dm_1 \wedge \omega^1 + dm \wedge \omega^2 + a_1\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ dm \wedge \omega^1 + dm^2 \wedge \omega^2 - a_2\omega^1 \wedge \omega^2 = 0; \end{cases} \tag{3.10}$$

$$a_i = m_i(1-m) + m^2 + m. \tag{3.11}$$

Решение существует с произволом двух функций одного аргумента.

Для случаев (3.2) – (3.4) найдены системы уравнений Пфаффа и доказаны теоремы существования.

§4. Конгруэнции V_0 с трехкратной и четырехкратной фокальной поверхностью (A_3)

Из формул (2.6), (2.7) следует, что (A_3) – трехкратная фокальная поверхность только в одном из следующих четырех случаев:

$$a_1+b_1+1=0,\ a_2+b_2+1=0; \qquad (4.1)$$

$$a_1+b_1+1=0,\ a_2+b_2-1=0; \qquad (4.2)$$

$$a_1+b_1-1=0,\ a_2+b_2+1=0; \qquad (4.3)$$

$$a_1+b_1-1=0,\ a_2+b_2-1=0; \qquad (4.4)$$

причем в первом случае A_3 – четырехкратная фокальная поверхность.

Замыкая уравнения

$$\omega_3^1+\omega_1^3+\omega^1=0,\ \omega_3^2+\omega_2^3+\omega^2=0, \qquad (4.5)$$

приходим к соотношениям

$$b_2(m_1+m)=0,\ b_1(m_2+m)=0. \qquad (4.6)$$

В силу неравенства (1.3) b_1 и b_2 не могут обращаться в нуль одновременно. Пусть, например, $b_1=0$, $b_2\neq 0$. Тогда

$$a_1=-1,\ m_1+m=0. \qquad (4.7)$$

Замыкая $\omega_1^3=0$ и учитывая (4.7), получим:

$$m_1+m=0. \qquad (4.8)$$

Система уравнений Пфаффа приводится к виду:

$$\begin{cases}\omega^3=0,\ \omega_1^1+\omega^1=0,\ \omega_2^2+\omega^2=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_2^3+\omega_3^2+\omega^2=0,\\ \omega_3^1+\omega^1=0,\ \omega_3^2=a_2\omega^2,\ \omega_1^2=0,\ \omega_2^1=m_2\omega^2,\ \omega_3^2=0.\end{cases} \qquad (4.9)$$

Она определяет с произволом двух функций одного аргумента подкласс конгруэнций V_0 с четырехкратной фокальной поверхностью (A_3), вырождающейся в линию. Назовем такую конгруэнцию $V_{0,3}^{(1)}$. Аналогично с заменой индексов 1 на 2 и наоборот определяется другой подкласс конгруэнций конгруэнции $V_{0,3}^{(2)}$ с четырехкратной фокальной линией (A_3).

Докажем, что $A_3\in Q\subset V_{0,3}^{(i)}$ – фокальная точка второго порядка. Из (1.5), (2.5) следует, что

$$-d(F_1\omega^1 + F_2\omega^2)|_{F_1=0,\,F_2=0,\,x^1=0,\,x^2=0,\,x^3=1} = (a_1+1)(a_1+b_1+1)(\omega^1)^2 + \\ + (a_2+1)(a_2+b_2+1)(\omega^2)^2. \qquad (4.10)$$

Следовательно, A_3 – фокальная точка второго порядка тогда и только тогда, когда

$$(a_1+1)(a_1+b_1+1)=0,\ (a_2+1)(a_2+b_2+1)=0. \qquad (4.11)$$

В силу неравенства (1.3) возможны только следующие варианты

$$a_1=-1,\ b_1=0,\ a_2+b_2+1=0; \qquad (4.12)$$

$$a_2=-1,\ b_2=0,\ a_1+b_1+1=0. \qquad (4.13)$$

Но соотношения (4.12) определяют конгруэнции $V_{0,3}^{(1)}$, а соотношения (4.13) – конгруэнцию $V_{0,3}^{(2)}$. Приходим к следующим теоремам

Теорема 3. *Существуют только два класса конгруэнций V_0 с четырехкратной фокальной точкой $A_3 \in Q$. Они определяются с произволом двух функций одного аргумента. Многообразие (A_3) таких конгруэнций вырождается в линию с касательной, параллельной координатному вектору – соответственно $\vec{e}_1$ или $\vec{e}_2$.*

Теорема 4. *Точка $A_3 \in Q \subset V_0$ тогда и только тогда становится фокальной точкой второго порядка, когда она является четырехкратной фокальной точкой первого порядка.*

Последнее утверждение вытекает из того, что характеристическим признаком четырехкратности фокальной точки $A_3 \in Q \subset V_0$ являются соотношения (4.1), сводящиеся к (4.12) и (4.13).

Для конгруэнций V_0 с трехкратной фокальной поверхностью (A_3), не являющейся четырехкратной (случаи (4.2) – (4.4)), доказаны теоремы существования и установлены некоторые геометрические свойства.

Список литературы

1. *Малаховская С.В.* Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1981. Вып. 12. С. 60 – 64.
2. *Малаховская С.В.* Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1982. Вып. 13. С. 44 – 47.
3. *Сопина Е.П.* Об одном классе конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве // Диф. геом. многобр. фигур. Калининград, 1985. Вып. 16. С. 81 – 83.

E. Yurova

THE CONGRUENCES OF ELLIPSOIDS WITH MULTIPLE FOCAL SURFACES

In three-dimensional affine space the congruences V of ellipsoids Q with non-degenerating surfaces S of the centres are investigated. It is proved, that the cross points with an ellipsoid Q of a diameter conjugated by a tangent plane to S about Q, can be focal only pairwise. The subclasses of congruences V with multiple focal surfaces and with a focal surface circumscribed by focal points of the second order are investigated. The characteristic indication of such focal surfaces is established.