

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ
С ГЛАВНЫМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Г.П. Б о ч и л л о

(Томский государственный университет)

Регулярное распределение Δ_n на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов $x = \{A, \alpha\}$ проективного пространства P_n порождает поле невырожденно-го тензора $\{\Lambda_{pq}^n\}$ - главного фундаментального тензора распределения (г.ф.т.р.). Здесь A - точка, α - инцидентная ей гиперплоскость пространства P_n . Рассматриваются связанные с г.ф.т.р. понятия инвариантных 1-семейств и подпространств, неподвижных элементов линейных преобразований, а также взаимных относительно г.ф.т.р. подпространств и устанавливается связь между ними, приводятся примеры таких понятий для конкретных значений $n=4,5$. В работе индексы принимают следующие значения: $I, J, \dots = 0, 1, n$; $i, j, \dots = 1, n$; $p, q, \dots = 1, n-1$.

1. К постановке задачи. Как известно, с гиперповерхностью, с m -мерной гиперполосой связан невырожденный тензор второго порядка, который в случае гиперполосы назван В.В.Вагнером [1] главным фундаментальным тензором. Регулярные распределения на многообразии невырожденных и вырожденных нуль-пар проективного пространства (последние автор называет [2] гиперплоскими элементами) порождают поля невырожденных симметричных тензоров второго порядка. Аналогичные тензоры возникают и при построении дифференциальной геометрии многообразий гиперплоских элементов [3], не являющихся гиперполосами. Неголономные гиперповерхности, регулярные распределения в однородных пространствах, а также соответствующие образы в пространствах со связностью также приводят к полям несимметричных тензоров второго порядка. Построения, связанные с такими тензорами, приводили многие авторы. В.В.Васенин [4] ввел направления на неголономном многообразии V_n^{n-1} (независимо полученные М.Р.Роговым [5] в P_n и названные им инвариантными), характеризующиеся тем, что в поляритете относительно асимптотического конуса и в поляритете Пантаци им соответствуют совпадающие между собой $(n-2)$ -плоскости. Аналогичные образы рассматривал В.В.Кайзер [6] для m -мерных распределений в n -мерном проективном пространстве. Позже Е.Т.Ивлев определил [7] линейное преобразование Π , также порождаемое несимметричным и невырожденным дважды ковариантным тензором и нашел неподвижные элементы этого преобразования. В [8] он же ввел понятие взаимных линейных подпространств и доказал, что в общем случае существует конечное число таких подпространств.

В работе рассматриваются вышеупомянутые понятия, а также устанавливается связь между ними применительно к г.ф.т.р. Δ_n на многообразии M_{2n-1} гиперплоских элементов пространства P_n .

2. Основные понятия и результаты. Приведем определения и некоторые результаты, обобщающие понятия инвариантных прямых, преобразования Π и пар взаимных подпространств на случай распределения Δ_n на многообразии M_{2n-1} гиперплоских элементов $\{A, \alpha\}$ пространства P_n , отнесенного к подвижным реперам $R(r) = \{A_I\}(\{\alpha^I\})$ с деривационными формулами $dA_I = \omega_I^J A_J$, где I - формы ω_I^J удовлетворяют условиям $d\omega_I^J = \omega_I^K \Lambda^K_J \omega_K^J$, $\sum \omega_I^I = 0$. При этом гиперплоский элемент $\{A, \alpha\}$ включается в репер, т.е. $A \equiv A_0$, $\alpha \equiv \alpha^n$ и распределение Δ_n на M_{2n-1} определяется системой $n-1$ форм $\theta_p \equiv \omega_p^n - \Lambda_{pq}^n \omega_0^q$, а уравнения распределения имеют вид:

$$\nabla \Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n \omega_0^0 = \Lambda_{pqi}^n \omega_0^i + \Lambda_{pq}^{nr} \omega_r^n, \quad \Lambda_{pq}^n \omega_n^q + \omega_p^0 = \Lambda_{pni}^n \omega_0^i + \Lambda_{pn}^{nr} \omega_r^n.$$

Таким образом, с регулярным распределением Δ_n на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов пространства P_n ассоциируется поле невырожденного несимметричного в общем случае тензора $\{\Lambda_{pq}^n\}$ (г.ф.т.р.):

$$\nabla \Lambda_{pq}^n + \Lambda_{pq}^n \omega_0^0 \equiv 0 \pmod{\omega_0^i, \omega_p^n},$$

где

$$\nabla \Lambda_{pq}^n = d\Lambda_{pq}^n - \Lambda_{pr}^n \omega_q^r - \Lambda_{rq}^n \omega_p^r + \Lambda_{pq}^n \omega_n^n.$$

Распределения Δ_n на M_{2n-1} класса $\Lambda_{[pq]}^n = 0$ рассмотрены в [9].

2.1. Инвариантные подпространства и 1-семейства гиперплоских элементов. Тензор $\{\Lambda_{pq}^n\}$ допускает известное разложение единственным образом $\Lambda_{pq}^n = \Lambda_{(pq)}^n + \Lambda_{[pq]}^n$, где $\{\Lambda_{(pq)}^n\}$ - симметричная, а $\{\Lambda_{[pq]}^n\}$ - кососимметричная части тензора $\{\Lambda_{pq}^n\}$. Геометрически первая определяет квадратичный конус с 0-мерной вершиной

$$Q_{n-2}: x^n=0, \Lambda_{[pq]}^n x^p x^q = 0, \quad (1)$$

а вторая - линейный комплекс

$$K_{n-2}: x^n=0, \Lambda_{[pq]}^n x^p y^q = 0. \quad (2)$$

Здесь $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\}$ ($\{y^0, y^1, y^2, \dots, y^n\}$) - проективные координаты точки пространства P_n . Объект $\{t\} = \{t^p, t^n, t_p\}$ где $\omega_0^p = t^p \theta$, $\omega_0^n = t^n \theta$, $\omega_p^n = t_p \theta$, $d\theta = \theta \wedge \theta_l$ определяет 1-семейство $M_1\{t\}$ гиперплоских элементов. Каждому $M_1\{t\}$ в P_n соответствует пара подпространств $\{L_1, l_{n-2}\}$, где $L_1 = TA_0|_{M_1=}$

$[A_0 d A_0 | M_1]$, $l_{n-2} = Ch\alpha^n | M_1 = [\alpha^n d \alpha^n | M_1]$. Согласно [10] $Z_{\alpha^n}(l) = [\alpha^n \Lambda_{pq}^n \alpha^p t^q]$ - левая поляра направления $l = [A_0 t^p A_p]$, $R_{\alpha^n}(l) = [\alpha^n \Lambda_{pq}^n \alpha^p t^q]$ - его правая поляра, $\Pi_{\alpha^n}(l) = [\alpha^n \Lambda_{(pq)}^n \alpha^p t^q]$ - поляра направления l , а $B_{\alpha^n}(l) = [\alpha^n \Lambda_{[pq]}^n \alpha^p t^q]$ - антиполяра направления l . Из [6] также известно, что если для направления l какие-нибудь две из четырех $(n-2)$ - плоскостей совпадают, то совпадают все, т.е. $Z_{\alpha^n} = R_{\alpha^n} = \Pi_{\alpha^n} = B_{\alpha^n}$. Кроме того, в таком случае эти четыре $(n-2)$ - плоскости совпадают и с $\tilde{\Pi}_{\alpha^n}$ - полярой направления l относительно конуса

$$\tilde{Q}_{n-2}: x^n = 0, \quad \tilde{\Lambda}_{(pq)}^n x^p x^q = 0, \quad (3)$$

где $\tilde{\Lambda}_{(pq)}^n$ - матрица, обратная к матрице $\tilde{\Lambda}_0^{(pq)}$, $\tilde{\Lambda}_0^{(pq)} = \frac{1}{2}(\Lambda_0^{pq} + \Lambda_0^{qp})$, а $\|\Lambda_0^{pq}\|$ - матрица, обратная к $\|\Lambda_{pq}^n\|$, т.е. $\Lambda_{pr}^n \Lambda_0^{rq} = \delta_p^q$.

При этом $\Lambda_{(rs)}^n = \tilde{\Lambda}_0^{(pq)} \Lambda_{p(r}^n \Lambda_{q|s)}^n$. Из условий совпадения левых и правых поляр направлений l имеем следующие уравнения

$$(\Lambda_{pq}^n - t \Lambda_{qp}^n) t^q = 0, \quad t^n = 0, \quad (4)$$

$$\det \|\Lambda_{pq}^n - t \Lambda_{qp}^n\| = 0. \quad (4')$$

Отсюда вытекает, что в общем случае в гиперплоскости α^n , имеется $n-1$ различных прямых $l_q = [A_0 t_q^p A_p]$, для которых совпадают Z_{α^n} и R_{α^n} .

Так как Z_{α^n} - $(n-2)$ - плоскость, отвечающая направлению l в обобщенном полярите Бомпиани, а $\Pi_{\alpha^n}(l)$ - поляра прямой l относительно асимптотического конуса Q_{n-2} , то прямые, определяемые из (4) и (4'), это аналоги в смысле [4, 5] инвариантных направлений неголономного многообразия и мы называем их *инвариантными* прямыми. Из [6] следует, что при n нечетном все они являются образующими конуса Q_{n-2} , а при n четном одна из них (соответствующая корню $t=1$ уравнения (4')) в общем случае не лежит на конусе Q_{n-2} и называется *особой инвариантной*. Путем канонизации репера несимметричная матрица $\|\Lambda_{pq}^n\|$ может быть приведена к квазидиагональному виду, т.е. прямые $[A_0 A_p]$ выбраны за инвариантные, если корни уравнения (4') различны и действительны. При этом уравнения конусов Q_{n-2} , $\tilde{Q}_{n-2}$ и линейного комплекса K_{n-2} имеют вид:

$$Q_{n-2}: x^n = 0, \quad \Lambda_{(p,n-p)}^n x^p x^{n-p} = 0; \quad (1')$$

$$\tilde{Q}_{n-2}: x^n = 0, \quad \tilde{\Lambda}_{(p,n-p)}^n x^p x^{n-p} = 0; \quad (3')$$

$$K_{n-2}: x^n = 0, \quad \Lambda_{[p,n-p]}^n x^p y^{n-p} = 0. \quad (2')$$

2.2. Преобразование Π и его неподвижные элементы. Эти понятия, по-видимому, введены в [7]. Приведем построения относительно тензора $\{\Lambda_{pq}^n\}$ и гиперплоского элемента пространства P_n . Каждой прямой l тензор $\{\Lambda_{pq}^n\}$ в нашем случае ставит в соответствие две $(n-2)$ -плоскости:

$$Z_{\alpha^n}(l): x^n = 0, \quad x^p u_p = 0, \quad u_p = \Lambda_{pq}^n x^q; \quad (5)$$

$$R_{\alpha^n}(l): x^n = 0, \quad x^p u_p = 0, \quad u_p = \Lambda_{qp}^n x^q, \quad (6)$$

которые аналогично [6, 7] названы левой и правой полярной прямой l . Если одна из поляр прямой l ей инцидентна, то инцидентна l и другая. Совокупность прямых $l(A_0 \in l \subset \alpha^n)$, которым соответствуют левые и правые поляры, инцидентные l , является квадратичным конусом:

$$Q_{n-2}: x^n = 0, \quad \Lambda_{(pq)}^n x^p x^q = 0. \quad (7)$$

Линейный комплекс

$$K_{n-2}: x^n = 0, \quad \Lambda_{[pq]}^n x^p y^q = 0 \quad (8)$$

характеризуется тем, что в его нуль-системе каждому направлению l ставится в соответствие $(n-2)$ -плоскость, которая инцидентна прямой l и пересечению $(n-2)$ -плоскостей (5) и (6).

Конус Q_{n-2} и линейный комплекс K_{n-2} порождают *линейное преобразование* Π прямых гиперплоскости α^n

$$\Pi: \{l\} \rightarrow \{l^*\} \text{ где } l = [A_0 x^p A_p], \quad l^* = [A_0 y^q A_q],$$

$$y^q = \Pi_p^q x^p, \quad \Pi_p^q = \Lambda_{[pr]}^n \Lambda_0^{(rq)}, \quad \Lambda_0^{(qr)} \Lambda_{(rp)}^n = \delta_p^q.$$

Неподвижные прямые $X_q(x_q^p)$ преобразования Π определяются из системы $(\Pi_p^q - \lambda^r \delta_p^q) x_r^p = 0$. (9) Геометрически преобразование Π , как следует из формул Π_p^q , определяется следующим образом: прямая $l^* = \Pi(l)$ полярно сопряжена той $(n-2)$ -плоскости относительно Q_{n-2} , которая соответствует прямой l в нуль-системе K_{n-2} . Отсюда вытекает, что неподвижные прямые преобразования Π характеризуются каждым из следующих свойств: 1) для каждой прямой X_p плоскости (7) и (8) совпадают; 2) для каждой прямой X_p $(n-2)$ -плоскости, соответствующая ей в нуль-системе K_{n-2} , является полярной этой прямой относительно Q_{n-2} . Анализируя эти свойства и определения инвариантных и неподвижных прямых, а также $(n-2)$ -плоскостей, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Инвариантные прямые $((n-2)$ -плоскости) и только они являются неподвижными прямыми $((n-2)$ -плоскостями) относительно линейного преобразования Π .

2.3. Пары взаимных линейных подпространств. По аналогии с [8] дадим

Определение. Линейные пространства L_{m_1}, L_{m_2} ($L_{m_1} \cap L_{m_2} = A_0$, $[L_{m_1} L_{m_2}] = \alpha^n$) называются *взаимными* относительно г.ф.т.р., если они сопряжены относительно ассоциированных конуса Q_{n-2} и линейного комплекса K_{n-2} .

Согласно [8] заключаем, что в α^n в общем случае имеется конечное число пар линейных подпространств L_{m_1}, L_{m_2} , взаимных относительно г.ф.т.р. При этом $m_1, m_2 \neq 1$, т.к. для одномерного подпространства совпадение поляр относительно Q_{n-2} и K_{n-2} означает, что оно инцидентно Q_{n-2} (является образующей Q_{n-2}). Заметим, что такое 1-подпространство есть инвариантная прямая. Из определений инвариантных прямых и взаимных подпространств следует

Теорема 2. Взаимные подпространства инцидентны инвариантным прямым. По крайней мере, при $n=5$ справедлива

Теорема 3. Если подпространство, инцидентное инвариантным прямым, не является образующей Q_{n-2} , то оно будет одним из пары взаимных подпространств.

Используя формулы (1') - (3'), заключаем, что матрицы линейных преобразований $\tilde{P} \rightarrow \left\| \begin{smallmatrix} \sim q \\ P_p \end{smallmatrix} \right\|$, $P \rightarrow \left\| \begin{smallmatrix} * \\ P_p \end{smallmatrix} \right\|$, где $\begin{smallmatrix} \sim q \\ P_p \end{smallmatrix} = \Lambda_{[pr]}^n \begin{smallmatrix} \sim (rq) \\ \Lambda_0 \end{smallmatrix}$,

$\begin{smallmatrix} * q \\ P_p \end{smallmatrix} = \Lambda_{(pr)}^n \begin{smallmatrix} \sim (rq) \\ \Lambda_0 \end{smallmatrix}$ имеют теперь тот же вид, что и матрица преобразования $P \rightarrow \left\| \begin{smallmatrix} q \\ P_p \end{smallmatrix} \right\|$. Поэтому справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. Линейные преобразования прямых ((n-2)-плоскостей), инцидентных A_0, α^n , определяемые матрицами $P, \tilde{P}, P^*$, проективно эквивалентны.

Теорема 5. Линейные пространства L_{m_1}, L_{m_2} , взаимные относительно г.ф.т.р., полярно сопряжены также относительно конуса $\tilde{Q}_{n-2}$.

Замечание. При $\Lambda_{[pq]}^n = 0$ конусы Q_{n-2} и $\tilde{Q}_{n-2}$ совпадают, линейный комплекс K_{n-2} вырождается, а поэтому и линейные преобразования $P, \tilde{P}$ не определены, а P^* - тождественное преобразование. Поэтому роль взаимных относи-

тельно г.ф.т.р. подпространств играют подпространства дополнительной размерности, полярно сопряженные относительно конуса Q_{n-2} .

3. Приложения.

3.1. **Случай $n=4$.** В пространстве P_4 в α^4 в общем случае, имеется три инвариантных прямых (2-плоскости), которые являются также неподвижными прямыми (2-плоскостями).

Взаимных относительно г.ф.т.р. подпространств нет, поскольку в α^4 одно из двух подпространств дополнительной размерности, инцидентных лишь A_0 , одномерно.

3.2. **Случай $n=5$.** В пространстве P_5 в α^5 4 инвариантных (неподвижных) прямых (3-плоскости) в общем случае и, по крайней мере, одна пара взаимных относительно $\{\Lambda_{pq}^5\}$ двумерных подпространств: $[A_0A_2A_3]$ и $[A_0A_1A_4]$. Остальные двумерные подпространства, инцидентные попарно инвариантным прямым, являются прямолинейными образующими максимальной размерности (в этом случае два) квадратичного конуса Q_3 : $x^5 = 0$, $\Lambda_{(14)}^4 x^1 x^4 + \Lambda_{(23)}^4 x^2 x^3 = 0$.

Библиографический список

1. Вагнер В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. Вып. 8. С. 197-272.
2. Бочилло Г.П. К дифференциальной геометрии m -распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n -мерного проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 18-23.
3. Бочилло Г.П. Поля квадратичных конусов и распределения на многообразии всех гиперплоских элементов в P_n // Там же, 1988. Вып. 19. С. 15-19.
4. Васенин В.В. О некоторых вариантах неголономной гиперповерхности // Геометр. сб. / Томский ун-т. Томск, 1975. Вып. 12. С. 35-40.
5. Роговой М.Р. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V_n^{n-1} в P_n // Украинск. геометр. сб. / Харьковск. ун-т. Харьков, 1971. Вып. 10. С. 50-65.
6. Кайзер В.В. Расширения, сужения и сопряженные направления дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах // Геометр. сб. / Томский ун-т. Томск, 1975. Вып. 15. С. 20-49.
7. Ивлев Е.Т., Кондакова Э.М. К многомерной проективно-дифференциальной геометрии неголономных многообразий невырожденных нуль-пар // Тр. Сибирск. физ.-техн. института им. В.Д.Кузнецова. Томский ун-т. Томск, 1973. Вып. 64. С. 232-262.

8. *Ивлев Е.Т.* О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ /Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 32-37.

9. *Бочилло Г.П.* Об одном классе распределений Λ_n на многообразии гиперплоских элементов пространства P_n // Там же, 1989. Вып. 20. С. 19-23.

G. P. B o c h i l l o

ON SOME GEOMETRIC IMAGES, ASSOCIATED WITH THE BASIC FUNDAMENTAL TENSOR OF DISTRIBUTION

Regular distribution on a manifold of all hyperplanar elements $x=\{A, \alpha\}$ of projective space P_n generates a field of nondegenerated tensor $\{\Lambda_{pq}^n\}$ — of the basic fundamental tensor of distribution. Here A is a point and α is a hyperplane of projective space incident to it. Concepts of invariant 1-families and subspaces, fixed elements of linear transformations and also reciprocal subsurfaces (relative to B.F.T.D) connected with B.F.T.D are considered and a relation is established between them. Examples of such concepts for the concrete values $n=4,5$ are brought.

УДК 514.76

ГЕОМЕТРИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРОЙКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

О. А. Б ы к а н о в а

(Московский педагогический государственный университет)

В работе строится геометрия следующей тройки распределений $\Delta^m, \tilde{\Delta}^m, \Delta^n$ на гладком многообразии M_N , где $N=m+n, m \leq n$. Построены частичные связности на главном расслоении $H^1(M_N)$ и $H^2(M_N)$. Исследование проводится методом дифференциальных продолжений с применением леммы Картана в инвариантных терминах теории расслоений дифференциально-геометрических объектов различных порядков, их структурных форм и структурных уравнений для этих форм.

Выделение пары распределений (Δ^m, Δ^n) на многообразии M_N приводит к следующей редукции расслоения реперов первого порядка $H^1(M_N)$:

$$\omega_i^a = H_{ik}^a \omega^k + H_{ib}^a \omega^b, \quad \omega_a^i = H_{ak}^i \omega^k + H_{ab}^i \omega^b, \quad (1)$$