верхности, образованной средними нормалями. Координаты n^i, n^{p+1} найдем из условия ортогональности вектора $\vec{N}$ векторам, по которым разложен вектор $d\vec{P}$:

$$(1-y\,b_{ii}^{p+2})\,n^i + y\,n^{p+1}\eta_i = 0.$$

Не умаляя общности, можно положить $n^{p+1}=-1$, тогда

$$n^i = \frac{y n_i}{1-y\,b_{ii}^{p+2}}, \quad N = \frac{y\eta_i \vec{e}_i}{1-y\,b_{ii}^{p+2}} - \vec{e}_{p+1}.$$

Если $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$, то $\eta_i = 0$ и $\vec{N} \parallel \vec{e}_{p+1}$, где $\vec{e}_{p+1}$ - орт вектора нормали $(x, \vec{H})$, ортогональной к средней. Обратно, если $\vec{N} \parallel \vec{e}_{p+1}$, то $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$. В этом случае $\vec{a}_i \perp \vec{e}_{p+1}$ и асимптотические формы гиперсферического изображения $\widetilde{V}_p$ будут

$$\varphi^{p+1} = -d\vec{e}_{p+2}\, d\vec{e}_{p+1} = -b_{11}^{p+1} b_{11}^{p+2}(\omega^1)^2 - \ldots - b_{pp}^{p+1} b_{pp}^{p+2}(\omega^p)^2,$$

$$\varphi^{p+2} = -d\vec{e}_{p+2}\, d\vec{e}_{p+1} = -(b_{11}^{p+2}\omega^1)^2 - \ldots - (b_{pp}^{p+2}\omega^p)^2.$$

Асимптотические формы поверхности V_p

$$\Phi^{p+1} = b_{11}^{p+1}(\omega^1)^2 + \ldots + b_{pp}^{p+1}(\omega^p)^2,$$
$$\Phi^{p+2} = b_{11}^{p+2}(\omega^1)^2 + \ldots + b_{pp}^{p+2}(\omega^p)^2.$$

С учетом тождества $\vec{a}_i \vec{a}_j = 0$ заключаем: ортогональной сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ соответствует ортогональная сопряженная сеть $\widetilde{\Sigma}_p \subset \widetilde{V}_p$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 6. Для поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, несущей ортогональную сопряженную сеть, $\vec{N} \parallel \vec{H}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$.

В этом случае ортогональной сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ соответствует ортогональная сопряженная сеть $\widetilde{\Sigma}_p \subset \widetilde{V}_p$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что для линейчатых поверхностей, образованных нормалями $(x, \vec{H})$, аналогичная теорема не имеет места.

Список литературы

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, VI, №4, с.475-490.

2. В е р е с о в а Е.Е. О средних нормалях V_2 в E_4.-Вопросы диф.геометрии. Сб.статей, МГПИ, 1973, с.25-50.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства.-Мат.сб., 1961, т.55(97), №4, с.4II-420.

4. Ч а к м а з я н А.В. К теории двойственно нормализуемых m-мерных поверхностей V_m в E_n.-ДАН СССР, т.I96, №3, 1971, с.538-540.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I2 198I

С.В. К и ш т а н о в а

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{K}$ квадрик с одной вырождающейся в точку фокальной поверхностью. Рассмотрены два класса конгруэнций $\mathcal{K}$, для которых установлены некоторые геометрические свойства.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{K}$ называется конгруэнция квадрик $Q \in P_3$, обладающая следующими свойствами: I/ существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i,j,k = 1,2)$; 2/ существует фокальная поверхность (F) , вырождающаяся в точку.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Вершины A_1, A_2 репера R совместим с фокальными точками квадрики Q, описывающими невырожденные поверхности S_i . Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) . Плоскость (A_1A_2F), где F -неподвижный фокус, не совпадающая с касательными плоскостями к (A_i), пересекает прямую ℓ в единственной точке, с которой совместим вершину A_3 репера R. Вершину A_4 репера поместим в полюс плоскости $(A_1A_2A_3)$ относительно квадрики Q.

Репер R геометрически фиксирован. Нормировку вершин репера проводим так, чтобы прямая A_3F пересекала прямую A_1A_2 в единичной точке $E = A_1 + A_2$.

Тогда

$$F = A_1 + A_2 - \sqrt{2}A_3 \tag{4}$$

и уравнение квадрики Q относительно репера R запишется в виде:

$$\mathcal{F} \equiv (x^4)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$\omega_i = \omega_i^4. \tag{6}$$

Система пфаффовых и конечных уравнений конгруэнции приводится к виду:

$$\begin{gathered}
\omega_i^i + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3 + \omega_2^3) - \sqrt{2}\,\omega_3^i - \omega_3^3 = 0, \\
\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{2}\,\omega_3^4 = 0, \quad \omega_i^j = 0; \\
\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = a^k\omega_k, \quad \omega_3^3 - \omega_4^4 = b^k\omega_k, \\
\omega_3^i - \omega_j^3 = g^{ik}\omega_k, \quad \omega_4^i - \omega_j = h^{ik}\omega_k, \\
\omega_3^4 + \omega_4^3 = m^k\omega_k, \quad \omega_i^3 = p_i^k\omega_k, \\
p_j^i g^{ij} - p_j^j g^{ii} - h^{ii} = 0, \quad a^i - \sqrt{2}(g^{1i} + g^{2i}) = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Анализируя систему (7), получаем:

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{K}$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Из определения конгруэнции $\mathcal{K}$ следует, что

$$p_i^j \neq 0. \tag{8}$$

Инвариантные ассоциированные квадрики Q_i [1], определяемые уравнениями

$$\mathcal{F}_i \equiv b^i(x^4)^2 + a^ix^1x^2 + g^{2i}x^1x^3 + h^{2i}x^1x^4 + g^{1i}x^2x^3 + h^{1i}x^2x^4 - m^ix^3x^4 = 0, \tag{9}$$

позволяют дать геометрическую характеристику относительным инвариантам конгруэнции $\mathcal{K}$. Условие $b^i = 0$ означает, что квадрика Q_i проходит через точку A_4. Условия $a^i = 0$, $m^i = 0$, $g^{2i} = 0$, $g^{1i} = 0$, $h^{2i} = 0$ означают соответственно, что точки A_1 и A_2, A_3 и A_4, A_1 и A_3, A_2 и A_3, A_1 и A_4 полярно сопряжены относительно Q_i.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_1$ конгруэнции $\mathcal{K}$, для которого фокальные поверхности (A_i) являются плоскостями. В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$p_i^i + g^{ji} = 0, \quad p_j^i + g^{jj} = 0, \quad h^{ij} = -1, \quad h^{ii} = 0. \tag{10}$$

Конгруэнции $\mathcal{K}_1$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Из (7) и (10) следует:

Т е о р е м а 2. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{K}_1$, образуют двусторонне расслояемую пару.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_2$ конгруэнции $\mathcal{K}$, для которого касательными плоскостями к поверхностям (A_i) являются плоскости $(A_iA_3A_4)$. Тогда $p_i^i = 0$. Конгруэнции $\mathcal{K}_2$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов и обладают следующими геометрическими свойствами.

Т е о р е м а 3. Для конгруэнции $\mathcal{K}_2$: 1/двойные точки Ермолаева

$$E_i = (-1)^i\sqrt{p_1^2p_2^1}\,A_3 + A_4 \tag{11}$$

поверхностей (A_i) гармонически делят вершины A_3 и A_4 репера R; 2/фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/Имеем:

$$dA_1\Big|_{\sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\,\omega_1+(-1)^i\omega_2} = \omega_1^1 A_1 + \omega_1 E_j ,$$

и $$dA_2\Big|_{\sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\,\omega_1+(-1)^i\omega_2} = \omega_2^2 A_2 + (-1)^j\sqrt{\frac{p_2'}{p_1^2}}\,E_j$$ и $(A_3A_4;E_1E_2)=-1$.

2/Фокусами луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) являются точки $F_i = A_1 + (-1)^i\sqrt{\frac{p_1^2}{p_2'}}\,A_2$. Следовательно, $(A_1A_2;F_1F_2)=-1$. Теорема доказана.

Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции линейчатых квадрик в трехмерном проективном пространстве.–В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.8,Калининград,1977,с.32-38.

2.М а л а х о в с к и й В.С. Введение в теорию внешних форм.Калининград,1978.

М.В.К р е т о в

О СВЯЗНОСТЯХ,АССОЦИИРОВАННЫХ С КОМПЛЕКСОМ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается комплекс (n-параметрическое семейство) K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q .Выделяется комплекс W_n центрированных диаметральных гиперплоскостей P .Показано,что с комплексом K_n ассоциируется главное расслоение $G_{n^2-n+1}(K_n)$,базой которого является многообразие K_n ,а типовым слоем – (n^2-n+1)-членная подгруппа стационарности центрированной гиперплоскости P .Доказано,что комплекс K_n индуцирует поле $\mathcal{N}_n$ одномерных направлений,не параллельных гиперплоскости P_n ,которые позволяют задать связность в расслоении $G_{n^2-n+1}(K_n)$.

§I.Комплекс центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве

Отнесем комплекс K_n центральных невырожденных гиперквадрик Q к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=\overline{1,n})$, где A -центр гиперквадрики.

Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha , \qquad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta ,$$

причем формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства $\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha$, $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$.

Уравнение квадрики Q имеет вид

$$F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-1=0,$$