ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 15 1984

УДК 514.75

Г. Матиева

К ГЕОМЕТРИИ МИНИМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В работе рассмотрены ортогонально дополнительные распределения Δ_p и $\bar{\Delta}_{n-p}$ в евклидовом пространстве E_n. Выделены необходимые и достаточные условия минимальности этих распределений. Изучена сеть $\sum_n(\Gamma)$, инвариантно определенная в E_n с помощью распределений Δ_p, $\bar{\Delta}_{n-p}$.

I. Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R=(x,\vec{e}_A)$, где $x\in E_n$ $(A,B,C=\overline{1,n})$. Деривационные формулы репера R имеют вид: $d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A$, $d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B$. Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики

$$dg_{AB}=g_{AK}\omega_B^K+g_{KB}\omega_A^K, \qquad (1)$$

где $g_{AB}=\vec{e}_A\cdot\vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n, и структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A, \quad \mathcal{D}\omega_A^B=\omega_A^K\wedge\omega_K^B.$$

Рассмотрим в E_n распределение Δ_p $(1<p<n-1)$ и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\bar{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p$ репера R расположим в плоскости $\Delta_p(x)$, а векторы $\vec{e}_{p+1},\dots,\vec{e}_n$ расположим в плоскости $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут

$$\omega_i^\alpha=\Lambda_{iA}^\alpha\omega^A \quad (i,j,k=1,\dots,p;\ \alpha,\beta,\gamma=p+1,\dots,n), \qquad (2)$$

а так как $\vec{e}_\alpha\in\bar{\Delta}_{n-p}(x)$, то $\omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha A}^i\omega^A$. Дифференцируя тождества $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha=0$, получим $\omega_i^\beta g_{\beta\alpha}+g_{ij}\omega_\alpha^j=0$. Отсюда имеем

$$\omega_\alpha^i=-g^{ik}\omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \quad \omega_i^\alpha=-g_{ij}\omega_\beta^j g^{\beta\alpha}. \qquad (3)$$

Продолжив систему уравнений (2), получим

$$d\Lambda_{ij}^\alpha-\Lambda_{ik}^\alpha\omega_j^k-\Lambda_{kj}^\alpha\omega_i^k+\Lambda_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha=\bar{\Lambda}_{ijA}^\alpha\omega^A, \quad \bar{\Lambda}_{ijA}^\alpha=\Lambda_{ijA}^\alpha+\Lambda_{i\beta}^\alpha\Lambda_{jA}^\beta.$$

$$d\Lambda_{i\beta}^\alpha-\Lambda_{i\gamma}^\alpha\omega_\beta^\gamma-\Lambda_{k\beta}^\alpha\omega_i^k+\Lambda_{i\beta}^\gamma\omega_\gamma^\alpha=\bar{\Lambda}_{i\beta A}^\alpha\omega^A, \quad \bar{\Lambda}_{i\beta A}^\alpha=\Lambda_{i\beta A}^\alpha+\Lambda_{ik}^\alpha\Lambda_{\beta A}^k.$$

Система величин $\{\Lambda_{ij}^\alpha,\Lambda_{i\beta}^\alpha\}$ образует геометрический объект-фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [4]. При этом компоненты Λ_{ij}^α и $\Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексам i,j. Величины $H_{ij}^\alpha=\frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^\alpha-\Lambda_{ji}^\alpha)$ образуют тензор. Этот тензор называют тензором неголономности распределения Δ_p. Распределение, тензор неголономности которого равен нулю тождественно, называется голономным [4]. Векторы $\vec{M}_p=\frac{1}{p}g^{ij}\Lambda_{(ij)}^\alpha\vec{e}_\alpha$ и $\vec{M}_{n-p}=\frac{1}{n-p}g^{\alpha\beta}\Lambda_{(\alpha\beta)}^i\vec{e}_i$ называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\bar{\Delta}_{n-p}$ соответственно [4]. Если вектор средней кривизны распределения равен нулю, то распределение называется минимальным [4].

2. Из первого равенства формул (3) имеем: $\Lambda_{\alpha i}^i=-g^{ik}\Lambda_{ki}^\beta g_{\beta\alpha}$ (по i нет суммирования). Суммируя по i обе части равенства, получим

$$\sum_i\Lambda_{\alpha i}^i=-\frac{1}{2}\sum_i g^{ik}\Lambda_{(ik)}^\beta g_{\beta\alpha} \qquad (4)$$

Доказана

Т е о р е м а I. Распределение Δ_p – минимально тогда и только тогда, когда объект $\sum\limits_i\Lambda_{\alpha i}^i=0$.

Выясним геометрический смысл последнего равенства. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{M}_p$:

$$\vec{M}_p\cdot\vec{e}_\alpha=\frac{1}{p}g^{ik}\Lambda_{(ik)}^\beta\vec{e}_\beta\cdot\vec{e}_\alpha=\frac{1}{p}g^{ik}\Lambda_{(ik)}^\beta g_{\beta\alpha}.$$

Отсюда в силу (4) имеем:

$$\vec{M}_p\cdot\vec{e}_\alpha=-\frac{2}{p}\sum_i\Lambda_{\alpha i}^i. \qquad (5)$$

Если $\sum\limits_i\Lambda_{\alpha i}^i=0$, то из (5) получим $\vec{M}_p\cdot\vec{e}_\alpha=0$, т.е. $\vec{M}_p\perp\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. Отсюда и следует, что $\vec{M}_p=\vec{0}$. Аналогично можно доказать, что верна

Т е о р е м а 2. Распределение $\bar{\Delta}_{n-p}$ – минимально тогда и только тогда, когда $\sum\limits_\alpha {}^\alpha_{i\alpha}=0$.

Геометрический смысл последнего равенства выясняется как и в предыдущем.

3.Для точки $\vec{y}=\vec{x}+y^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ нормальной плоскости к плоскости $\Delta_p(x)$ имеем $d\vec{y}=(\omega^i+y^{\alpha}\omega^i_{\alpha})\vec{e}_i+(\omega^{\beta}+dy^{\beta}+y^{\alpha}\omega^{\beta}_{\alpha})\vec{e}_{\beta}$. Чтобы $d\vec{y}\in\bar{\Delta}_{n-p}(x)$, смещение точки x по площадке $\Delta_p(x)$ должно удовлетворять условию: $(\Lambda^i_{\alpha j}y^{\alpha}+\delta^i_j)\omega^j=0$. Так как при смещении точки x формы ω^j не могут обращаться в нуль одновременно, то y^{α} должны удовлетворять уравнению:

$$\det\|\Lambda^i_{\alpha j}y^{\alpha}+\delta^i_j\|=0, \qquad (6)$$

которое определяет алгебраическую гиперповерхность порядка p в плоскости $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$ (присоединенная поверхность $\bar{V}_{n-p-1}$) 5). В плоскости $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$ найдем вторую поляру [3] точки x относительно гиперповерхности Её уравнение имеет вид:

$$A_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}+2A_{\alpha0}y^{\alpha}+p(p-1)=0, \qquad (7)$$

где $A_{\alpha\beta}=\sum\limits_{i,j}(\Lambda^i_{\alpha i}\Lambda^j_{\beta j}-\Lambda^j_{\alpha i}\Lambda^i_{\beta j})$, $A_{\alpha 0}=(p-1)\sum\limits_i\Lambda^i_{\alpha i}$, $A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}$ $(i\neq j)$.

Уравнение алгебраической гиперповерхности порядка $n-p$ в плоскости $\Delta_p(x)$ (присоединенная поверхность V_{p-1}) пишется в виде: $\det\|\Lambda^{\alpha}_{i\beta}z^i+\delta^{\alpha}_{\beta}\|=0$. Вторая поляра точки относительно гиперповерхности V_{p-1} в плоскости $\Delta_p(x)$ определяется уравнением

$$B_{ij}z^iz^j+2B_{i0}z^i+(n-p)(n-p-1)=0, \qquad (8)$$

где $B_{ij}=\sum\limits_{\alpha,\beta}(\Lambda^{\alpha}_{i\alpha}\Lambda^{\beta}_{i\beta}-\Lambda^{\beta}_{i\alpha}\Lambda^{\alpha}_{j\beta})$, $B_{i0}=(n-p-1)\sum\limits_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{i\alpha}$, $B_{ij}=B_{ji}$ $(\alpha\neq\beta)$.

Выясним геометрический смысл коэффициентов при переменных в уравнении (7). Будем считать, что репер R ортонормированный. Рассмотрим векторы Родрига [1]: $\vec{\tau}^{\alpha}_i=\Lambda^k_{\alpha i}\vec{e}_k$, $\vec{\tau}^{\alpha}_j=\Lambda^k_{\alpha j}\vec{e}_k$, i, j фиксированы и $i<j$. Спроектируя эти векторы на плоскость $(x,\vec{e}_i,\vec{e}_j)$[3] получим векторы:

$$\vec{\tau}^{\alpha'}_i=\Lambda^i_{\alpha i}\vec{e}_i+\Lambda^j_{\alpha i}\vec{e}_j, \quad \vec{\tau}^{\alpha'}_j=\Lambda^i_{\alpha j}\vec{e}_i+\Lambda^j_{\alpha j}\vec{e}_j$$

Повернув вектор $\vec{\tau}^{\alpha}_j$ вокруг точки x в плоскости $(x,\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ на отрицательный прямой угол имеем вектор: $\vec{\tau}^{\alpha''}_j=\Lambda^{\alpha}_{j}\vec{e}_i-\Lambda^i_{\alpha j}\vec{e}_j$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{\tau}^{\alpha'}_i$, $\vec{\tau}^{\alpha''}_j$:

$$\vec{\tau}^{\alpha'}_i\vec{\tau}^{\alpha''}_j=\Lambda^i_{\alpha i}\Lambda^j_{\alpha j}-\Lambda^j_{\alpha i}\Lambda^i_{\alpha j}.$$

Суммируя по i, j обе части последнего равенства получим:

$$A_{\alpha\alpha}=\sum_{i,j}\vec{\tau}^{\alpha'}_i\cdot\vec{\tau}^{\alpha''}_j=\sum_{i,j}(\Lambda^i_{\alpha i}\Lambda^j_{\alpha j}-\Lambda^j_{\alpha i}\Lambda^i_{\alpha j}).$$

$$A_{\alpha\beta}=\sum_{i,j}\vec{\tau}^{\alpha'}_i\vec{\tau}^{\beta''}_j=\sum_{i,j}(\Lambda^i_{\alpha i}\Lambda^j_{\beta j}-\Lambda^j_{\alpha i}\Lambda^i_{\beta j});$$

$$A_{\alpha 0}=(p-1)\sum_i\Lambda^i_{\alpha i}=-\frac{p(p-1)}{2}\vec{M}_p\cdot\vec{e}_{\alpha}$$

Т е о р е м а 3. Распределение Δ_p минимально тогда и только тогда, когда вторая поляра (7) точки x относительно гиперповерхности V_{n-p-1} имеет центр в точке x

4.Пусть распределения Δ_p и $\bar{\Delta}_{n-p}$ минимальны. Координатные векторы $\vec{e}_i, \vec{e}_{\alpha}$ репера R направим по главным направлениям квадрик (7) и (8), соответственно. В выбранном репере уравнения (7),(8) имеют вид:

$$\sum_{i,j}(\Lambda^i_{\alpha i}\Lambda^j_{\alpha j}-\Lambda^j_{\alpha i}\Lambda^i_{\alpha j})(y^{\alpha})^2+p(p-1)=0 \qquad (7)$$

$$\sum_{\alpha,\beta}(\Lambda^{\alpha}_{i\beta}\Lambda^{\beta}_{i\beta}-\Lambda^{\beta}_{i\alpha}\Lambda^{\alpha}_{i\beta})(z^i)^2+(n-p)(n-p-1)=0. \qquad (8)$$

Интегральные линии главных направлений квадрик (7) и (8) образуют ортогональную сеть $\sum_n(F)$ в E_n.

Т е о р е м а 4. Если сеть $\sum_n(F)$ является (V,Δ)-асимптотической и распределение $\sum_n(F)$ голономное, то вторая поляра (7) точки x относительно гиперповерхности $\bar{V}_{n-p-1}\subset\bar{\Delta}_{n-p}(x)$ является эллипсоидом в пространстве $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$.

Список литературы

I.Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства.- Сибирский матем.журнал, I966, № 3, с.499-5II.

2.Базылев В.Т. Сети на многообразиях.-В сб.: Труды геометрич.семинара Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР, I976, т.6, с.I89-204.

3.Есин В.А. К геометрии сетей на поверхностях коразмерности два.-В сб.: Геометрия погруженных многообразий.М., I980, с.29-32.

4.Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве , и их обобщения.-Проблемы геометрии.Итоги науки и техники.ВИНИТИ, I975, 7, с.2I5-229.

5.Шинкунас Ю.И. О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве.-В сб.: Тр.геометрич.семинара.Итоги науки и техники, ВИНИТИ, I974, т.5.