УДК 574.76

Н. В. Малаховский

(Московский финансово-юридический университет,
Калининградский филиал)

Квазитензоры, порожденные *n*-параметрическим семейством оснащенных коллинеаций *n*-мерных проективных пространств

На n-параметрическом семействе Π_n оснащенных коллинеаций π n-мерных проективных пространств определены четыре квазитензора и исследованы определяемые ими геометрические образы в пространствах P_n и p_n.

Ключевые слова: оснащенная коллинеация, квазитензор, тензор, инвариантная гиперплоскость, гиперплоскость, геометрический объект, оснащение Бортолотти.

1. Поля геометрических объектов на семействе Π_n оснащенных коллинеаций

Определение 1.1. *Семейством* Π_n *называется n-параметрическое семейство коллинеаций* $\pi : P_n \to p_n$ *n-мерных проективных пространств с заданными в них областями* $U_n \subset P_n$ *и* $u_n \subset p_n$, *однозначно определяемые парой соответствующих точек* $M_0 \in U_n$ *и* $m_0 = \pi\left(M_0\right) \in u_n$ [3, с. 50].

Совмещая вершину A_0 репера $\left\{A_0, A_1, ..., A_n\right\}$ пространства P_n с точкой M_0, а вершину a_0 репера $\left\{a_0, a_1, ..., a_n\right\}$ с точкой m_0, получим в неоднородных координатах уравнение коллинеации $\pi \in \Pi_n$:

$$x^i = \frac{M_I^i X^I}{1 - P_I X^I}. \quad \left(i, j, k, ... \overline{1, n};\ I, J, K, ... = \overline{1, n}\right). \qquad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что формы Пфаффа

$$\Omega^I,\ \omega^i,\ \nabla M_I^i,\ \nabla P_I + \Omega_I^0 - M_J^i \omega_i^0 \overset{def}{=} \Delta P_I , \qquad (1.2)$$

где символ $\nabla -$ символ ковариантного дифференцирования, являются структурными формами коллинеации $\pi \in \Pi_n$.

Система уравнений Пфаффа семейства Π_n [3, с. 51—52] запишется в виде

$$\omega^i = \lambda_I^i \Omega^I,\ \nabla M_I^i = M_{IJ}^i \Omega^J,\ \Delta P_I = P_{IJ} \Omega^J . \qquad (1.3)$$

$$\nabla M_{IJ}^i + M_J^i \Omega_I^0 + M_I^i \Omega_J^0 - \left(M_I^i \lambda_J^k + M_I^k \lambda_J^i \right) \omega_k^0 = M_{IJK}^i \Omega^K ,$$

$$\nabla \lambda_I^i = \lambda_{IJ}^i \Omega^J ,\ \nabla P_{IJ} + P_J \Omega_I^0 + P_I \Omega_J^0 - M_{IJ}^i \omega_i^0 = P_{IJK} \Omega^K . \qquad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем величины λ симметричны по всем нижним индексам, а величины M и P — по любой паре нижних индексов, начиная со второго.

При исследовании семейств Π_n были построены поля следующих геометрических объектов [3—5]:

1) квазитензоры

$$r_i = \overset{*}{S}{}_i^K \left(P_K - \frac{1}{n+1} \Lambda_K \right),\ t_i = \overset{*}{S}{}_i^K \left(P_K + \frac{1}{n+1} M_K \right), \qquad (1.5)$$

где

$$\Lambda_J = \overset{*}{\lambda}{}_i^K \lambda_{KJ}^i ,\ M_J = \overset{*}{M}{}_i^K M_{KJ}^i ,\ S_K^i = M_K^i - \lambda_K^i ,$$

а $\overset{*}{\lambda}{}_i^K$, $\overset{*}{M}{}_i^K$, $\overset{*}{S}{}_i^K$ — тензоры, взаимные соответственно к тензорам λ_K^i, M_K^i, S_K^i;

2) аффиноры

$$B_J^K = \overset{*}{\lambda}{}_i^K M_J^i ,\ b_i^k = \overset{*}{\lambda}{}_i^K M_K^k ,\ B_J^K = \overset{*}{M}{}_i^K \lambda_J^i ,\ b_i^k = \overset{*}{M}{}_i^K \lambda_K^k , \qquad (1.6)$$

следы которых являются абсолютными инвариантами семейства Π_n;

3) тензоры

$$C_K = \Lambda_K + M_K ,,\ m_i = C_K \overset{*}{M}{}_i^K ,\ \lambda_i = C_K \overset{*}{\lambda}{}_i^K . \qquad (1.7)$$

Использование этих геометрических объектов дало возможность получить ряд инвариантных геометрических образов (гиперплоскостей и гиперконусов) в пространствах P_n и p_n.

2. Квазитензоры U_J, $\tilde{U}_J$, V_J, $\tilde{V}_J$

Компьютерная программа автоматического поиска геометрических объектов [1; 2] позволила обнаружить ряд квазитензоров, выражающихся более сложными формулами, поиск которых без использования компьютеров требует вычислений, трудно осуществляемых в реальном времени.

Рассмотрим системы величин:

$$U_J = \overset{*}{S}{}_i^K M_J^i \left(M_K - (n+1)P_K\right) - (n+1)P_J; \tag{2.1}$$

$$\tilde{U}_J = \overset{*}{S}{}^i_J \overset{*}{M}{}_i^K \left(M_K - (n+1)P_K\right) + M_J; \tag{2.2}$$

$$V_J = \overset{*}{S}{}_i^K M_J^i \left(\Lambda_K + (n+1)P_K\right) + (n+1)P_J; \tag{2.3}$$

$$\tilde{V}_J = \overset{*}{S}{}^i_J \overset{*}{M}{}_i^K \left(\Lambda_K - (n+1)P_K\right) + \Lambda_J, \tag{2.4}$$

где $\overset{*}{S}{}^i_J$ — взаимный тензор к тензору $S_i^K = \overset{*}{M}{}_i^K - \overset{*}{\lambda}{}_i^K$.

Дифференцируя системы (2.1) — (2.4), получим

$$\begin{aligned} dU_J &= U_K\Omega_J^K - U_J\Omega_0^0 + (n+1)\Omega_J^0 + U_{JK}\Omega^K, \\ d\tilde{U}_J &= \tilde{U}_K\Omega_J^K - \tilde{U}_J\Omega_0^0 - (n+1)\Omega_J^0 + U_{JK}\Omega^K, \\ dV_J &= V_K\Omega_J^K - V_J\Omega_0^0 - (n+1)\Omega_J^0 + V_{JK}\Omega^K, \\ d\tilde{V}_J &= \tilde{V}_K\Omega_J^K - \tilde{V}_J\Omega_0^0 + (n+1)\Omega_J^0 + V_{JK}\Omega^K. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из выражения (2.5) следует, что системы величин

$$D_J = U_J + V_J,\ \tilde{D}_J = U_J + \tilde{U}_J,\ \mathrm{F}_J = V_J + \tilde{U}_J,\ \tilde{F}_J = V_J + \tilde{V}_J \tag{2.6}$$

— ковариантные векторы. Следовательно, системы величин

$$d_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^K D_K,\ \tilde{d}_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^K \tilde{D}_K,\ f_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^K T_K,\ \tilde{f}_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^K \tilde{T}_K \tag{2.7}$$

также являются ковариантными векторами.

3. Геометрические образы, определяемые квазитензорами (2.1) — (2.4) и тензорами (2.6), (2.7)

Квазитензоры (2.1) — (2.4) определяют в пространстве P_n четыре инвариантные гиперплоскости, не проходящие через точку A_0:

$$U_J X^J + 1 = 0,\ \tilde{U}_J X^J + 1 = 0,\ V_J X^J + 1 = 0,\ \tilde{V}_J X^J + 1 = 0. \qquad (3.1)$$

Используя обратную коллинеацию

$$\pi^{-1} : p_n \to P_n, \qquad (3.2)$$

определяемую формулами

$$X^J = \frac{\overset{*}{M}{}_i^J\, x^i}{1 - P_J\, \overset{*}{M}{}_i^J\, x^i}, \qquad (3.3)$$

находим четыре инвариантные гиперплоскости в пространстве p_n, не проходящие через точку a_0:

$$\left(U_J - P_J\right)\overset{*}{M}{}_i^J\, x^i + 1 = 0,\ \left(\tilde{U}_J - P_J\right)\overset{*}{M}{}_i^J\, x^i + 1 = 0, \qquad (3.4)$$

$$\left(V_J - P_J\right)\overset{*}{M}{}_i^J\, x^i + 1 = 0,\ \left(\tilde{V}_J - P_J\right)\overset{*}{M}{}_i^J\, x^i + 1 = 0. \qquad (3.5)$$

Ковариантные векторы (2.6), (2.7) определяют соответственно в пространствах P_n и p_n четыре инвариантные плоскости, проходящие через точку A_0 и четыре инвариантные плоскости, проходящие через точку a_0:

$$D_J X^J = 0,\ \tilde{D}_J X^J = 0,\ F_J X^J = 0,\ \tilde{F}_J X^J = 0, \qquad (3.6)$$

$$d_i x^i = 0,\ \tilde{d}_i x^i = 0,\ f_i x^i = 0,\ \tilde{f}_i x^i = 0. \qquad (3.7)$$

Квазитензоры (2.1)—(2.4) индуцируют в P_n оснащения Бортолотти.

Используя тензор C_J, получаем дважды ковариантные симметрические тензоры

$$A_{IJ} = C_{(I}D_{J)}, \tilde{A}_{IJ} = C_{(I}\tilde{D}_{J)}, B_{IJ} = C_{(I}F_{J)}, \tilde{B}_{IJ} = C_{(I}\tilde{F}_{J)}; \quad (3.8)$$

$$a_{ij} = c_{(i}d_{j)}, \tilde{a}_{ij} = c_{(i}\tilde{d}_{j)}, b_{ij} = c_{(i}f_{j)}, \tilde{b}_{ij} = c_{(i}\tilde{f}_{j)} \quad (3.9)$$

где $c_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^K C_K$.

Список литературы

1. *Малаховский Н.В.* Компьютерное моделирование метода продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 96—101.

2. *Малаховский В.С., Малаховский Н.В.* Применение компьютерного моделирования к исследованию пфаффовых систем и дифференцируемых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. М., 2010. Т. 124. С. 115—138.

3. *Малаховский Н.В.* О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 50—57.

4. *Малаховский Н.В.* Нормализация проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Там же. Вып. 21. С. 50—56.

5. *Малаховский В.С.* Поля геометрических объектов на *n*-параметрическом семействе оснащенных коллинеаций *n*-мерных проективных пространств // Там же. Вып. 39. С. 88—95.

N. Malakhovsky

Quasitensors generated by *n*-parametric family of the framed collineations on the *n*-dimensional projective spaces

Four quasitensors on the *n*-parametric family of the framed collineations of the *n*-dimensional projective spaces P_n and p_n are found. On each of these spaces invariant hyperplanes and hyperquadrics generated by these quasitensors are investigated.