УДК 514.76

***А. В. Букушева***
*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-4

## К геометрии обобщенных неголономных многообразий Кенмоцу

Вводится понятие обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу. В отличие от определенного ранее неголономного многообразия Кенмоцу изучаемое в статье многообразие является почти нормальным почти контактным метрическим многообразием нечетного ранга. Многообразие оснащается метрической связностью с кручением, названной в работе канонической связностью. Изучаются основные свойства канонической связности. Каноническая связность представляет собой аналог обобщенной связности Танаки — Вебстера. В работе доказывается, что каноническая связность является единственной метрической связностью с кручением специального строения, сохраняющей структурную 1-форму и векторное поле Риба. Изучается внутренняя геометрия обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу, оснащенного канонической связностью. Доказывается, что если обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно канонической связности, то оно риччи-плоское относительно этой связности. Приводится пример обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу, не являющегося неголономным многообразием Кенмоцу.

***Ключевые слова:*** обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, тензор Схоутена, многообразие Эйнштейна

---

*Поступила в редакцию 01.07.2022 г.*

## 1. Введение

Неголономное многообразие Кенмоцу является обобщением многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [1]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [2], в то время как структуры неголономного многообразия Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено автором настоящей работы в статье [3]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу $M$ обладает рядом замечательных свойств. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [4]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера $P$, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$, обращается в нуль. В работе [5] доказано, что альтернация тензора Риччи — Схоутена, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. В настоящей работе мы вводим понятие обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу $M$. Многообразие $M$ в отличие от неголономного многообразия Кенмоцу $M$, вообще говоря, не является нормальным почти контактным метрическим многообразием. В работе [5] на неголономном многообразии Кенмоцу рассматривалась связность $\nabla_X^T$, являющаяся аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. В настоящей работе мы называем эту связность канонической связностью и изучаем обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу $M$, оснащенное канонической связностью.

## 2. Основные результаты

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие $M$ нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g\right)$ [2]. Здесь, в частности, $\eta$ — 1-форма и $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающие, соответственно, распределение $D$: $D = \ker(\eta)$ и оснащение $D^{\perp}$ распределения $D$: $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение $D$ называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi}^{1} = N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где

$$N_{\varphi}\left(X, Y\right) = \left[\varphi X, \varphi Y\right] + \varphi^{2}\left[X, Y\right] - \varphi\left[\varphi X, Y\right] - \varphi\left[X, \varphi Y\right]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма $\varphi$. Почти контактное метрическое многообразие называется почти нормальным, если оказывается справедливым равенство

$$\tilde{N}_{\varphi} = N_{\varphi} + 2\varphi^{*} d\eta \otimes \vec{\xi} = 0.$$

Нормальное почти контактное метрическое многообразие $M$ называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Легко показать, что для многообразия $M$ также выполняется условие $L_{\vec{\xi}}\, g = 2\left(g - \eta \otimes \eta\right)$. Обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу — это почти нормальное почти контактное метрическое многообразие M, для которого выполняются следующие условия: 1) $L_{\vec{\xi}}\, g = 2\left(g - \eta \otimes \eta\right)$, 2) $d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0$. Заметим, что условие $d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0$ для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется необходимым образом.

В дальнейшем будут изучаться исключительно обобщенные неголономные многообразия Кенмоцу, для обозначения которых будет использоваться термин «многообразие».

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора $g$ в адаптированных координатах [6]: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ $(i, j, k = 1, ..., n;\ a,\ b,$ $c = 1, ..., n-1)$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [6] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее обычным для ковариантной производной условиям.

Коэффициенты внутренней связности в адаптированных координатах определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$.

Пусть $\psi$*:* $D \to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Имеет место следующее предложение [5].

***Предложение 1***. *Ненулевые коэффициенты связности Леви-Чивиты многообразия M в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},\ \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - g_{ab},\ \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a + \psi^b_a,$$

где $\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \dfrac{1}{2} g^{ad} \left( \vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right)$, $\psi^b_a = g^{bc} \omega_{ac}$.

Для доказательства предложения используется формула

$$2\Gamma^m_{ij} = g^{km} \left( A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{lj} \right) + \Omega^m_{ij},$$

где $\left[ \vec{e}_i, \vec{e}_j \right] = \Omega^k_{ij} \vec{e}_k$.

Связность $\nabla^T_X$, определяемую равенством

$$\nabla^T_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left( \left( \tilde{\nabla}_X \eta \right) Y \right) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X) \psi Y,$$

будем называть *канонической связностью обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу M*. Каноническая связность получается из $N$-связности

$$\nabla^N_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left( \tilde{\nabla}_X \eta \right)(Y) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N) Y,$$

если положить в последнем равенстве $N = C$.

***Предложение 2***. *Ненулевые коэффициенты* $G_{ij}^{k}$ *канонической связности* $\nabla_X^T$ *многообразия M в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad} \left( \vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right), \; G_{nb}^{a} = \delta_b^a .$$

***Предложение 3***. *Каноническая связность* $\nabla_X^T$ *многообразия M является единственной метрической связностью с кручением*

$$S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)Y - \eta(Y)X \quad \left(X,Y,Z \in \Gamma(TM)\right),$$

*сохраняющей структурную 1-форму* $\eta$ *и векторное поле Риба* $\vec{\xi}$ *обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу.*

Докажем, что у любой метрической связности $\nabla$, сохраняющей структурную 1-форму $\eta$ и векторное поле Риба $\vec{\xi}$ и обладающей кручением

$$S(X,Y) = 2\omega(X,Y)\vec{\xi} + \eta(X)Y - \eta(Y)X,$$

ненулевые коэффициенты $G_{ij}^{k}$ совпадают с коэффициентами связности из предложения 2.

Условие метричности связности $\nabla$ влечет равенство

$$G_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad} \left( \vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right).$$

Из равенств $\nabla\vec{\xi} = 0, \; \nabla\eta = 0$ следует, что

$$G_{bn}^{a} = G_{bc}^{n} = G_{bn}^{n} = G_{nc}^{n} = G_{nn}^{a} = G_{nn}^{n} = 0.$$

Найдем необходимые для доказательства компоненты тензора кручения *S(X, Y)* связности $\nabla$: $S_{na}^{b} = G_{na}^{b} - G_{an}^{b} = G_{na}^{b}$.

С другой стороны, из равенства

$$S(X,Y)=2\omega(X,Y)\vec{\xi}+\eta(X)Y-\eta(Y)X$$

следует, что $S_{na}^{b}=\delta_{a}^{b}$. Таким образом, $G_{nb}^{a}=\delta_{a}^{b}$. Тем самым, предложение 3 доказано.

Вычислим необходимые нам для дальнейшего отличные от нуля компоненты тензора кривизны $K$ связности $\nabla_{X}^{T}$. Воспользуемся для этого формулой

$$K(X,Y)Z=\nabla_{X}^{T}\nabla_{Y}^{T}Z-\nabla_{Y}^{T}\nabla_{X}^{T}Z-\nabla_{[X,Y]}^{T}Z.$$

Имеем $K_{abc}^{d}=R_{abc}^{d}-2\omega_{ba}\delta_{c}^{d}$, $K_{nab}^{c}=\partial_{n}\Gamma_{ab}^{c}-\nabla_{a}\delta_{b}^{c}$.

Здесь $\nabla$ — внутренняя связность, а $R_{abc}^{d}$ — компоненты тензора Схоутена [3]. Учитывая, что $P_{ad}^{c}=\partial_{n}\Gamma_{ab}^{c}=0$, получаем $K_{nab}^{c}=0$.

Пусть $K(X,Y)$ — соответствующий тензору $K(X,Y)Z$ тензор Риччи. Имеют место равенства

$$k_{ac}=r_{ac}+2\omega_{ad}\delta_{c}^{d}=r_{ac}+2\omega_{ac}.$$

В работе [5] предложение 4 доказывалось для случая неголономного многообразия Кенмоцу.

***Предложение 4***. *Для неголономного многообразия Кенмоцу размерности $n=2m+1$ выполняется следующее равенство:* $2m\omega_{ca}-r_{[ac]}=0$ [5].

**Теорема**. *Пусть обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу M является многообразием Эйнштейна относительно канонической связности, тогда оно риччи-плоское относительно этой связности*

*Доказательство*. Пусть $M$ — обобщенное неголономное многообразие Эйнштейна. Отсюда, в частности, следует, что

$$k_{ac}=r_{ac}+2\omega_{ac}=\lambda g_{ac},\quad \lambda\in R.$$

Тогда, с одной стороны, объект $k_{ac}$ симметричен, так как $k_{ac} = \lambda g_{ac}$. С другой стороны, проальтернировав равенство $k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}$ и воспользовавшись равенством $2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}\left(r_{ac} - r_{ca}\right)$, получаем $k_{[ac]} = (-2m+2)\omega_{ac}$.

Другими словами, если $m \neq 1$, то $k_{[ac]} \neq 0$.

Теорема доказана.

Приведем пример обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M = \left\{\left(x^i\right) \in R^5 : x^2 \neq 0\right\}$ $(i,\ j,\ k = 1,\ldots,\ 5;\ a,\ b,\ c = 1,\ \ldots,\ 4)$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$. Здесь: 1) $D = \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\rangle$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - y\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\left(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\right)$ — естественный базис пространства $R^5$, 2) $\vec{\xi} = \partial_5 = \vec{e}_5$, 3) $\eta = dx^5 + x^2 dx^1$, 4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi} = 0$, 5) метрический тензор $g$ определяется по формуле $g(\vec{e}_a, \vec{e}_a) = e^{2x^5}$, $g(\vec{e}_5, \vec{e}_5) = 1$. Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие $M$ не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_{\varphi}^{(1)}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \varphi^2[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [\vec{e}_3, \vec{e}_4] - \varphi[\vec{e}_3, \vec{e}_2] - \varphi[\vec{e}_1, \vec{e}_4] +$$
$$+ 2d\eta\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)\vec{\xi} = \varphi^2\vec{\xi} - \eta\left(\vec{\xi}\right)\vec{\xi} = -\vec{\xi}.$$

С другой стороны, $N_{\varphi}^{(1)}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = 2d\eta(\vec{e}_3, \vec{e}_4)\vec{\xi} = 0$. Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0, \quad X \in \Gamma(TM).$$

Далее, $\partial_5 g_{ab} = 2g_{ab}$. Отсюда заключаем, что $L_\xi g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Таким образом, $M$ — обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу.

## Заключение

В работе показано, что геометрия обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу во многом повторяет геометрию изученного ранее неголономного многообразия Кенмоцу. Таким образом, условие нормальности многообразия не является существенно более сильным, чем условие почти нормальности, если многообразие наделено структурой нечетного ранга.

### *Список литературы*

1. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

2. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds / Publishing House of Transilvania University of Brasov. Brasov, 2007.

3. *Букушева А.В.* К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу // Известия Алтайского государственного университета. 2021. №1 (117). С. 84—87.

4. *Галаев С.В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, №3 (337). С. 632—640.

5. *Букушева А.В.* Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера // ДГМФ. Калининград, 2021. №52. С. 42—51.

6. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

7. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

MSC 2010: 53D15

*A. V. Bukusheva*
*Saratov State University*
*83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia*
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-4

## On the geometry of generalized nonholonomic Kenmotsu manifolds

Submitted on July 1, 2022

The concept of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold is introduced. In contrast to the previously defined nonholonomic Kenmotsu manifold, the manifold studied in the article is an almost normal almost contact metric manifold of odd rank. The manifold is equipped with a metric connection with torsion, which is called the canonical connection in this work. The main properties of the canonical connection are studied. The canonical connection is an analogue of the generalized Tanaka-Webster connection. In this paper, we prove that the canonical connection is the only metric connection with torsion of a special structure that preserves the structural 1-form and the Reeb vector field. We study the intrinsic geometry of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold equipped with a canonical connection. It is proved that if a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold is an Einstein manifold with respect to a canonical connection, then it is Ricci-flat with respect to this connection. An example of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold that is not a nonholonomic Kenmotsu manifold is given.

*Keywords*: generalized nonholonomic Kenmotsu manifold, intrinsic connection, Schouten tensor, Einstein manifold

*References*

1. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 24, 93—103 (1972).

2. *Pitis, G.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov (2007).

3. *Bukusheva, A. V.:* Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds. Izvestiya of Altai State University, 1 (117), 84—87 (2021).

4. *Galaev, S. V.:* Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. Siberian Math. J., **57**:3, 498—504 (2016).

5. *Bukusheva, A. V.:* Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection. DGMF. Kaliningrad, 52, 42—51 (2021).

6. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016).

7. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).