УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ТОЧЕК

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский ун-т)

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные [1] конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, порожденные парой точек P и P^*, когда многообразие (P) -поверхность, (P^*) -линия. Соответствие между элементами многообразий таково, что полным прообразом точки P^* линии (P^*) является линия Γ_{p^*} на поверхности (P). Получены свойства, дающие геометрическую характеристику конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$.

Отнесем конгруэнцию $(PP^*)_{2,1}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где точка A совмещается с текущей точкой P поверхности (P), конец вектора $\bar{e}_3$ с соответствующей точкой P^*, векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ расположены в касательной плоскости к поверхности (P), причем конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой M пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с касательной к линии (P^*) в соответствующей точке P^*, и вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_{p^*}.

Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ в выбранном репере R имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^3=0, \quad \omega_3^3=-a\omega^1 \quad (a\neq 0), \quad \omega_3^2=-\omega^2, \quad \omega_3^1+\omega^1+\omega_3^3=0, \\ \omega_1^3=k\omega^1+\ell\omega^2, \quad \omega_2^3=\ell\omega^1+m\omega^2, \quad \omega_1^2=b\omega^1-\omega^2, \\ \omega_1^1=c\omega^1-\ell\omega^2, \quad \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2. \end{cases} \tag{1}$$

Конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Рассматривая геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией $(PP^*)_{2,1}$, получаем следующие свойства таких конгруэнций: 1) торсы прямолинейной конгруэнции (PP^*) высекают на поверхности (P) сеть линий Γ_{p^*} $(\omega^1=0)$, Γ $(\omega^2=0)$; 2) характеристические точки координатных плоскостей принадлежат прямой PP^*; 3) касательная плоскость к фокальной поверхности $\bar{F}=\bar{A}+\frac{1}{1-a}\bar{e}_3$ прямолинейной конгруэнции (PP^*) содержит касательную $\tilde{\ell}$ к линии Γ_{p^*}, проведенную в соответствующей F точке.

Обозначим буквой ℓ_1 линию пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с соприкасающейся плоскостью линии (P^*) в соответствующей точке P^*. Линия ℓ_1 определяется уравнением $b(1-x^1)+h x^2=0$, $x^3=0$, где $h=k+c+1$. Торсы $\omega_1^3=0$ прямолинейной конгруэнции (PM) высекают на поверхности (M) линии, касательные к которым в точке M определяются вектором $\bar{E}=h\bar{e}_1+b\bar{e}_2$ и, следовательно, являются прямыми ℓ_1.

Т е о р е м а 1. Линия (P^*) является прямой тогда и только тогда, когда касательные к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль направления $\omega^2=0$ параллельны соответствующим координатным плоскостям $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть линия (P^*) -прямая, т.е. $d\bar{A}_3=\lambda d^2\bar{A}_3$. Тогда $h=b=0$ и направление касательной к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль $\omega^2=0$ определяется вектором $\bar{E}_1=\bar{e}_1+k(\bar{e}_1-\bar{e}_3)$, параллельным плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$. 2) Направление касательной к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль $\omega^2=0$ определяется вектором $(d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=\omega^1(c\bar{e}_1+b\bar{e}_2+k\bar{e}_3)$. Он параллелен плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$ в том случае, если $b=0$. Учитывая это условие в системе (1), получаем $h=0$. Следовательно, линия (P^*) является прямой.

Т е о р е м а 2. Вырожденные конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, у которых линия (P^*) -прямая, имеют на поверхности (P) плоские линии Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линия (P^*) -прямая, если $h=b=0$. В силу этих условий $((d^n\bar{A})_{\omega^2=0},\bar{e}_1,\bar{e}_1-\bar{e}_3)=0$, $n=1,2,3,\ldots$, т.е. линии Γ на поверхности (P) -плоские.

Т е о р е м а 3. Поверхность (P) вырожденной конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, у которой соприкасающаяся плоскость $\tilde{\alpha}$ линии Γ_{p^*} в точке P параллельна касательной ℓ^* линии (P^*) в соответствующей точке P^* или проходит через точку P^*, расслаивается на семейство плоских линий Γ_{p^*}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть плоскость $\tilde{\alpha}$ параллельна прямой ℓ^*. Тогда $q+m=0$ и $((d^n\bar{A})_{\omega^1=0},\bar{e}_2,\bar{e}_1-\bar{e}_3)=0$. Следовательно, линии Γ_{p^*} -плоские и их плоскости параллельны соприкасающимся плоскостям α^* линии (P^*). 2) Пусть точка P^* инцидентна плоскости $\tilde{\alpha}$. Тогда $q=0$ и $((d^n\bar{A})_{\omega^1=0},\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0$. То есть линии Γ_{p^*} в этом случае инцидентны плоскостям $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$.

С л е д с т в и е. Если прямая ℓ_1 параллельна касательной $\tilde{\ell}$ к линии Γ_{p^*} и линия (P^*) не является прямой, то линия Γ_{p^*} -плоская.

Т е о р е м а 4. Линии Γ_{p*}, Γ тогда и только тогда сопряжены на поверхности (P), когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (PP^*) к семейству касательных плоскостей поверхности (P).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (P) имеет вид $k(\omega^1)^2+2\ell\omega^1\omega^2+m(\omega^2)^2=0$. I) Пусть линии Γ_{p*}, Γ сопряжены на поверхности (P), т.е. $\ell=0$. Тогда условие указанного аффинного расслоения $\omega_3^i\wedge\omega_i^3=0$ удовлетворяется тождественно. 2) Пусть существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (PP^*) к семейству касательных плоскостей поверхности (P), т.е. выполняется условие $\omega_3^i\wedge\omega_i^3=0$ или $a\ell=0$. Так как $a\neq0$, то $\ell=0$ и линии Γ_{p*}, Γ в этом случае сопряжены на поверхности (P).

Библиографический список

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр. ун-т. Калининград. I973. Вып. 3. С. 4I–50.

УДК 5I4.76

О СВЯЗИ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРОСТРАНСТВОМ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

В.Н. Х у д е н к о
(Калининградский ун-т)

В проективном пространстве P_n рассматривается связность Γ в главном расслоении $G(B_h^*)$, ассоциированном с h-мерным многообразием обобщенных пространственных элементов (L_ℓ, L_{p+1})[1]. Исследуется связь с пространством линейной связности. Доказано, что ассоциированное расслоение с фундаментально-групповой связностью можно рассматривать как пространство линейной связности специального типа.

Как показано в [1], система дифференциальных уравнений h-параметрического многообразия B_h^* обобщенных пространственных элементов [2] записывается в виде

$$\omega_\mu^{\bar a}=M_{\mu i}^{\bar a}\tau^i, \quad \omega_\mu^a=\Lambda_{\mu i}^a\tau^i, \quad \omega_{\bar b}^a=\Lambda_{\bar b i}^a\tau^i, \qquad (I)$$

где τ^i – параметрические формы. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$i,j=1,2,\dots,h; \qquad \mu,\nu,\eta=1,2,\dots,\ell+1;$$

$$\bar a,\bar b,\bar c=\ell+1,\ell+2,\dots,p+2; \quad a,b,c=p+3,p+4,\dots,n+1.$$

С многообразием B_h^* ассоциируется главное расслоенное пространство $G(B_h^*)$, базой которого является многообразие B_h^*, а типовым слоем – подгруппа стационарности обобщенного пространственного элемента (L_ℓ, L_{p+1}). В главном расслоенном пространстве задается связность по Г.Ф.Лаптеву с помощью поля объекта связности [I]: $\Gamma=\{\Gamma_{\mu i}^\nu, \Gamma_{\bar b i}^\nu, \Gamma_{bi}^\nu, \Gamma_{\bar b i}^{\bar a}, \Gamma_{bi}^{\bar a}, \Gamma_{bi}^a\}$.

Структурные уравнения ассоциированного расслоения с фундаментально-групповой связностью [3] можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} D\tilde\omega_\mu^\nu=\tilde\omega_\mu^\eta\wedge\tilde\omega_\eta^\nu+R_{\mu ij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j, \\ D\tilde\omega_a^b=\tilde\omega_a^c\wedge\tilde\omega_c^b+R_{aij}^b\tau^i\wedge\tau^j, \\ D\tilde\omega_{\bar a}^{\bar b}=\tilde\omega_{\bar a}^{\bar c}\wedge\tilde\omega_{\bar c}^{\bar b}+R_{\bar a ij}^{\bar b}\tau^i\wedge\tau^j, \\ D\omega_{\bar b}^\nu=\tilde\omega_{\bar b}^\mu\wedge\tilde\omega_\mu^\nu+\tilde\omega_{\bar b}^{\bar a}\wedge\tilde\omega_{\bar a}^\nu+R_{\bar b ij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j, \\ D\tilde\omega_b^\nu=\tilde\omega_b^\mu\wedge\tilde\omega_\mu^\nu+\tilde\omega_b^{\bar a}\wedge\tilde\omega_{\bar a}^\nu+\tilde\omega_b^a\wedge\tilde\omega_a^\nu+R_{bij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j, \\ D\tilde\omega_b^{\bar a}=\tilde\omega_b^{\bar b}\wedge\tilde\omega_{\bar b}^{\bar a}+\tilde\omega_b^a\wedge\tilde\omega_a^{\bar a}+R_{bij}^{\bar a}\tau^i\wedge\tau^j, \end{cases} \qquad (2)$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R_{\mu ij}^\nu=\Gamma_{\mu i}^\eta\Gamma_{\eta j}^\nu+\Gamma_{\mu ij}^\nu,$$

$$R_{aij}^b=\Gamma_{aij}^b+\Gamma_{ai}^c\Gamma_{cj}^b,$$

$$R_{\bar a ij}^{\bar b}=\Gamma_{\bar a ij}^{\bar b}+\Gamma_{\bar a i}^{\bar c}.\Gamma_{\bar c j}^{\bar b},$$

$$R_{\bar b ij}^\nu=\Gamma_{\bar b i}^\mu\Gamma_{\mu j}^\nu+\Gamma_{\bar b i}^{\bar a}\Gamma_{\bar a j}^\nu+\Lambda_{\bar b i}^a\Gamma_{aj}^\nu+\Gamma_{\bar b ij}^\nu,$$

$$R_{bij}^\nu=\Gamma_{bi}^{\bar a}\Gamma_{\bar a j}^\nu+\Gamma_{bi}^a\Gamma_{aj}^\nu+\Gamma_{bi}^\mu\Gamma_{\mu j}^\nu+\Gamma_{bij}^\nu,$$

$$R_{bij}^{\bar a}=\Gamma_{bi}^\mu M_{\mu j}^{\bar a}+\Gamma_{bi}^{\bar b}\Gamma_{\bar b j}^{\bar a}+\Gamma_{bi}^a\Gamma_{aj}^{\bar a}+\Gamma_{bij}^{\bar a}.$$